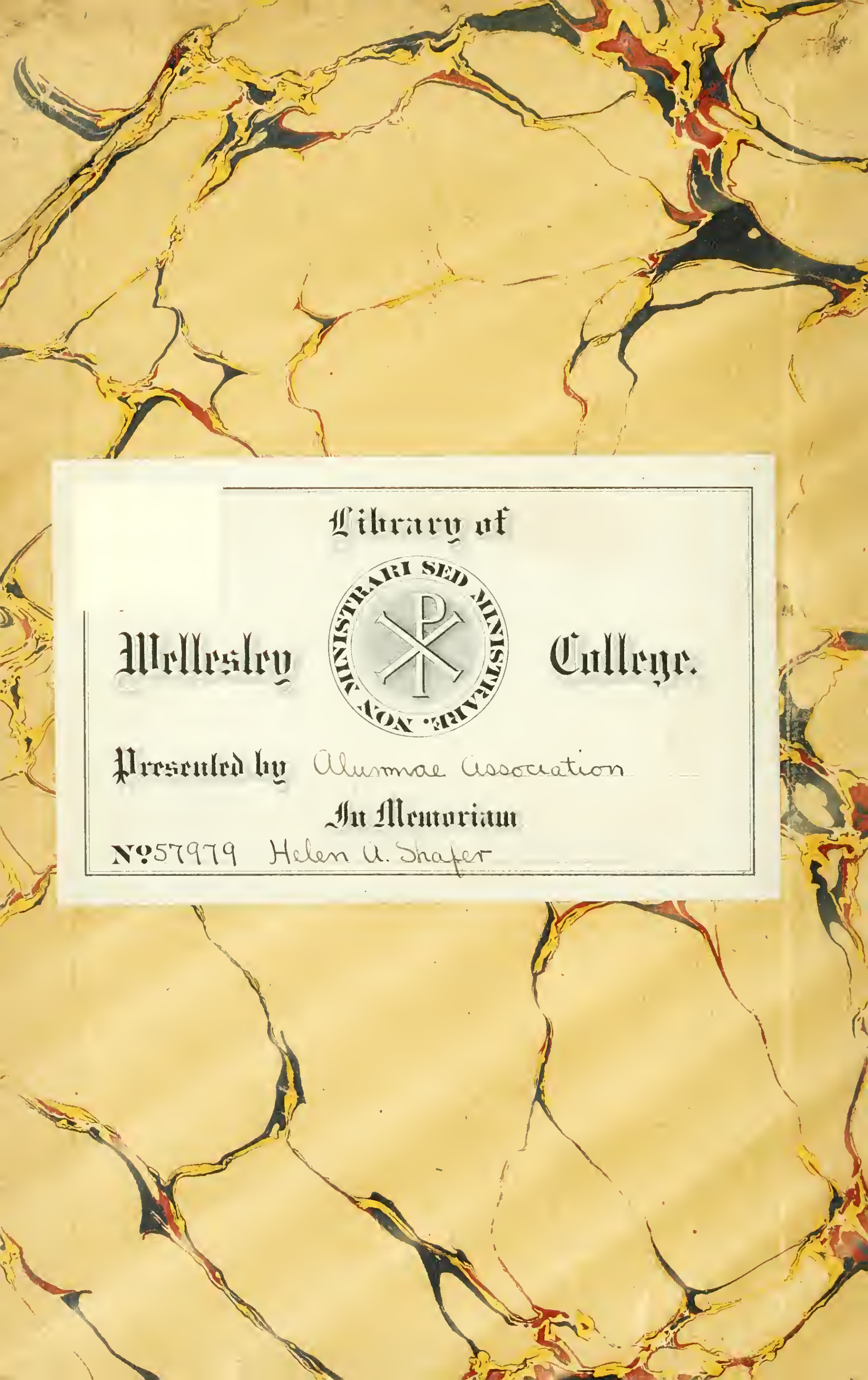



Library of
Wellesley College.
NON MINISTRARI SED MINISTRARE.
Presented by Alumnae Association
In Memoriam
Nº 57979 Helen A. Shafer



Formulaire de Mathématiques

PUBLIÉ PAR

G. PEANO

Professeur d'Analyse infinitésimale à l'Université de Turin



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1901

Stampato coi tipi della « Rivista di Matematica »
dalla Tip. P. Gerbone - Torino.

PRÉFACE

Bien que l'histoire de chaque symbole mathématique soit contenue dans le Formulaire, nous pouvons ici la résumer en quelques mots.

Selon l'ordre chronologique, les premiers symboles sont les chiffres 0, 1, 2,... dont l'origine est très ancienne.

Suivent les symboles des opérations arithmétiques $+$, $-$ (a.1500), $\times$ (a.1600),... les relations $=$ (a.1550), $>$ (a.1650), les nombres e, π (a.1700),... Pendant le dernier siècle les symboles Σ, Π, lim, mod, sgn, E,... ont pénetré dans l'usage commun.

Ces symboles permettent d'exprimer complètement quelques propositions :

$$2+3=5 \qquad 2<\mathrm{e}<3 \qquad \lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e} \qquad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$$

etc. En général on s'en sert pour exprimer les parties d'une proposition, lesquelles doivent être accompagnées du langage ordinaire pour former des propositions complètes.

La partie réservée au langage ordinaire, plus petite dans quelques travaux d'Analyse, était encore grande dans les ouvrages géométriques. Le calcul barycentrique de Möbius, la science de l'extension de Grassmann, les quaternions de Hamilton, pour ne citer que les théories principales, permettent maintenant d'opérer sur les objets géométriques comme on opère en Algèbre sur les nombres (voir le § des vecteurs).

La Logique mathématique à son tour étudie les propriétés des opérations et des relations logiques, qu'elle indique par des symboles.

Quelques principes de cette science se rencontrent dans la Logique générale (voir Aristote). Son vrai fondateur est Leibniz, qui a énoncé les principales propriétés des idées représentées maintenant par les signes $\frown$, $\smile$, $-$, $=$, $\supset$, Λ.

Le but des recherches de Leibniz était de créer une manière de « Spécieuse Générale, où toutes les vérités de raison seroient

réduites à une façon de calcul. Ce pourroit être en mêmes tems une manière de Langue ou d'Écriture universelle, mais infiniment différente de toutes celles qu'on a projetées jusqu'ici ; car les caractères, et les paroles mêmes, y dirigeroient la Raison ; et les erreurs excepté celles de fait, n'y seroient que des erreurs de calcul. Il seroit très difficile de former ou d'inventer cette langue ou caractéristique ; mais très aisé de l'apprendre sans aucuns dictionnaires » (p. 701 des Opera philosophica, a. 1840).

Il énonce ce projet dans son premier travail, ou, comme il l'appelle, dans son « essai d'écolier » intitulé « de arte combinatoria a.1666 ». Dans l' « Historia et commentatio linguae charactericae universalis, quae simul sit ars inveniendi et judicandi » (ib. p. 162), il dit que ces pensées « semper altissime infixae menti haesere ». Il fixe le temps nécessaire à la former : « aliquot selectos homines rem intra quinquennium absolvere posse puto ». Il ajoute enfin « Itaque repeto, quod saepe dixi, hominem, qui neque Propheta sit neque Princeps, majus aliquid generis humani bono, nec divinae gloriae accomodatius suscipere nunquam posse ».

Dans ses dernières lettres il regrette « que si j'avois été moins distrait, ou si j'étois plus jeune, ou assisté par des jeunes gents bien disposés, j'espérerois donner une manière de » cette spécieuse (pag. 701). Il dit aussi (pag. 703) « J'ai parlé de ma spécieuse générale à Mr. le Marquis de l'Hospital, et à d'autres ; mais ils n'y ont point donné plus d'attention que si je leur avois conté un songe. Il faudrait que je l'appuyasse par quelque usage palpable ; mais pour cet effet il faudroit fabriquer une partie au moins de ma Charactéristique ; ce qui n'est pas aisé, surtout dans l'etat où je suis ».

Leibniz n'a pas publié, de son vivant, les résultats incomplets qu'il avait obtenus. Erdmann, a.1840 a commencé la publication des manuscrits sur ce sujet. L'édition de Gerhardt a.1875 est plus complète. Les plus intéressantes pièces ont été publiées récemment par M. Vacca (*).

(*) M. Couturat dans « L'Enseignement mathématique a.1900 p.409 » (G. Carré & C. Naud, Paris), annonce une nouvelle publication de ces manuscrits.

En conséquence les idées de Leibniz n'ont pas eu des continuateurs immédiats, à l'exception de LAMBERT et quelque autre, jusq'à BOOLE, DE MORGAN a.1850, SCHRÖDER a.1877, MCCOLL a.1878, etc. qui ont retrouvé les théorèmes précédents, en ont énoncé des nouveaux, et ont développé des intéressantes théories. Voir la Bibliographie.

M. TAIT a remarqué l'analogie entre les calculs géométriques et logiques : « La similitude frappante de ces deux systèmes « de symboles, types de procédés qui sont au fond les mêmes, « nous suggère la remarque qu'après tout, il n'y a qu'une « science unique dans l'Analyse mathématique, ayant diverses « branches, mais employant dans chacune d'elles les mêmes « procédés. Par l'une de ses branches, cette science nous dé- « voile les mystères de la Géométrie de position, hors de la « portée du raisonnement géométrique ordinaire ; par l'autre, « elle permet au logicien d'arriver à des vérités de déduction « auxquelles il n'aurait jamais pu atteindre sans le secours « de l'instrument des formules » (*Quaternions*, traduit par PLARR. Paris, 1882, p. 81).

Dans la publication qui sera indiquée par F1889 nous avons remarqué qu'il suffit d'ajouter les symboles ε, son inverse, et quelques autres moins importants, pour compléter l'analyse des idées de Logique qu'on rencontre dans les sciences mathématiques, et nous avons écrit entièrement en symboles quelques théories mathématiques.

L'idéographie, qui résulte de la combinaison des symboles logiques avec les algébriques, a été bientôt appliquée par divers Auteurs. Dans quelques travaux elle sert seulement à énoncer sous forme plus claire des théorèmes.

En général elle est l'instrument indispensable pour analyser les principes de l'Arithmétique et de la Géométrie, et pour y démêler les idées primitives, les dérivées, les définitions, les axiomes et les théorèmes. On s'en est aussi servi pour construire des longues suites de raisonnement, presqu'inabordables par le langage ordinaire.

La RdM. t.7 p.3 contient la table de 67 Mémoires publiées en différents pays par 15 Auteurs, dans lesquels on a adopté cette idéographie. Leur nombre s'est accru dans la suite.

Nous pouvons exactement dire avec LEIBNIZ :

« Itaque profertur hic calculus quidam novus et mirificus,
« qui in omnibus nostris ratiocinationibus locum habet, et qui
« non minus accurate procedit quam Arithmetica aut Algebra.
« Quo adhibito semper terminari possunt controversiae quantum
« ex datis eas determinari possibile est, manu tantum ad ca-
« lamum admoto, ut sufficiat duos disputantes omissis verbo-
« rum concertationibus sibi invicem dicere : *calculemus*, ita
« enim perinde ac si duo Arithmetici disputarent de quodam
« calculi errore ».

Nous avons essayé de réunir en un seul volume les propositions écrites entièrement en symboles, et que nous appelons « formules ». Ainsi s'est formé le t.1 du Formulaire, publié en 1892-1895. MM. F. CASTELLANO, G. VAILATI, C. BURALI-FORTI, R. BETTAZZI, G. VIVANTI, F. GIUDICE, G. FANO y ont collaboré, ou ont réduit en symboles de nouvelles théories.

Dans le t.2 a.1897-1899 nous avons coordonné ces différentes théories, en comblant les lacunes, et en posant à la place voulue les additions proposées par MM. G. VACCA, A. PADOA, M. CHINI, et d'autres (RdM. t.6 p.65-74). L'exécution typographique de ce travail a été très laborieuse. Il exige l'exactitude d'une table de logarithmes, et est de composition beaucoup plus difficile.

Le Formulaire actuel (a.1901) contient les propositions déjà publiées dans l'édition de l'a.1899, les formules de Logique publiées dans RdM. t.7 p.1-41, les propositions nouvelles réduites en symboles par MM. :

M. NASSÒ (RdM. t.7 p.42-55)

F. CASTELLANO (id. p.58)

G. VACCA (id. p.59-66)

M. CHINI (id. p.66)

T. BOGGIO (id. p.70-72, et d'autres non publiées)

et les additions et les corrections indiquées par MM. G. Eneström (id. p.66), Vivanti, Ciamberlini, Padoa, Ramorino, Buhl, et plusieurs autres.

M. Vacca a ajouté les indications historiques aux P :

§⊃ ·9   §+ 4·3   §↑ 5·5 15·61   §! 4·2 7·6   §Chf ·4   §Np 3·3·4 9·4·62
§Nprf ·3   §cont 3·4   §D 4·4 20·5   §Dtrm 1·1   §π 1·82 3·1 3·7 12·1
§sin 4·1·5 5·1 10·1 13·2 14·2 16·1-·3 §B 1·11·21·8 §vet 33·6·61 34·1·2·6·8

et beaucoup d'autres indications bibliographiques ; il nous a de nouveau puissamment aidé dans tout ce travail.

Nous avons complété quelques théories, notamment sur les dérivées, sur les intégrales, et sur les nombres complexes.

Les symboles conservent ici la forme commune, lorsqu'il est possible; ex: $+$, $-$, $\times$, $>$, $=$, 0 , 1 , 2,... log , sin , e , π ... Lorsqu'il y a plusieurs notations en usage, nous avons adopté la plus ancienne, ou la plus répandue. Lorsque nous avons dû introduire un symbole nouveau, nous avons pris le mot du langage ordinaire, plus ou moins abrégé ; ex : pnt , vct , quot , rest, ...

Les mots du langage mathématique commun montent à plusieurs milliers (voir p.213). Il ne convient pas de les ériger tous en symboles ; ils s'expriment ici par environ 100 symboles.

Dans le langage ordinaire, on a plusieurs formes pour représenter une même idée indiquée ici par un symbole seul. Nous donnons à chaque symbole un nom ; mais il convient de lire les symboles, et les ensembles de symboles, sous une forme qui s'approche du langage ordinaire. Un peu d'exercice permet de lire les formules sous la forme habituelle.

Le Formulaire est toujours en construction. Nous continuérons à publier dans la RdM. les nouvelles propositions exprimées entièrement en symboles par les collaborateurs, les corrections et les indications historiques qu'on nous enverra, pour en tenir compte dans une nouvelle édition.

Le Formulaire est divisé en §§. Chaque § a pour titre un signe idéographique. Ces signes se suivent dans un ordre tel que tout signe résulte défini par les précédents (à l'exception des idées primitives).

Un § quelconque contient les propositions qu'on exprime par le signe du § et par les précédents. Ces derniers servent à classer les propositions d'un §.

En conséquence, on trouvera ici la place d'une proposition, déjà écrite en symboles, à peu près comme on trouve la place d'un mot dans un dictionnaire.

Toute proposition est indiquée par un nombre qui a une partie entière et une décimale, dans le but de faciliter l'interpolation.

Le signe ❊ indique le changement de la partie entière.

Turin, 1. I. 1901.

G. Peano.

FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

PREMIÈRE PARTIE

LOGIQUE MATHÉMATIQUE

§1 Cls ε $\ni$; $\supset$ $\frown$ $=$

✻ 1. *Notations*

·1 Les lettres a b ... z a' ... désignent des objets quelconques.

·2 On divise une formule en parties par des parenthèses () [ ] { } ou par des points.

·3 « Cls » signifie « classe ».

·4 Soit a une Cls; $x \varepsilon a$ signifie « x est un a ».

·5 Soit p une proposition contenant une lettre x; $x \ni p$ représente « la classe des x qui satisfont à la condition p ».

·6 $(x;y)$ ou (x,y) indique le couple, ou système des objets x et y.

·7 Soient a et b des Cls. $a \supset b$ signifie « tout a est b ».

Soient p et q des propositions contenant une variable x;

$$p \,.\supset_x.\, q,$$

signifie « de p on déduit, quel que soit x, la q », c'est-à-dire: « les x qui satisfont à la condition p satisferont aussi à la q », ou

$$(x \ni p) \supset (x \ni q)$$

Si les propositions p et q contiennent deux variables x, y,

$$p \,.\supset_{x,y}.\, q$$

signifie : « tout système x,y qui satisfait à la condition p est aussi une solution de la condition q », ou $(x;y) \ni p \supset (x;y) \ni q$.

Et ainsi de suite pour un plus grand nombre de variables.

On sous-entend les indices au signe $\supset$, lorsqu'il n'y a pas d' ambiguïté à craindre.

·8 $a \frown b$ ou ab indique la Cls commune aux Cls a et b.

L'affirmation simultanée des propositions p et q est indiquée par $p \frown q$, ou par pq.

Pour supprimer des parenthèses on convient que :
$pq \supset r$ signifie $(pq) \supset r$, et $p \supset qr$ signifie $p \supset (qr)$.
$p. \supset q$ et $p \supset . q$ signifient $p . \supset . q$.

·9 $x = y$ signifie "x est égal à y".

Notes.

·1. Les lettres variables, dans le Form., sont toujours en *italique*.

Les signes ayant une signification constante ont une forme spéciale: $\supset = + - \times$ ..., ou bien sont indiqués par des lettres grecques ε ι Σ, ou par des lettres romaines: Cls log mod ...

On rencontre les lettres variables dans Aristote pour représenter les idées de Logique (V. P4·4); elles sont d'un usage commun chez Euclide pour indiquer des points, des lignes, des nombres, etc. (V. §$\times$ P1·4).

Dans ces notes nous dirons qu'une lettre est *réelle* dans une formule, lorsque la valeur de la formule dépend du nom de la lettre ; dans le cas contraire la lettre est *apparente*.

P signifie «proposition». Ce signe n'est pas un symbole de logique, car il ne se trouve pas dans les formules ; c'est une simple abréviation.

Une P (proposition) ne contenant pas de lettres variables réelles est dite *catégorique*. Sont telles les théorèmes et les définitions ; toutes les lettres qui y figurent sont apparentes.

Les P catégoriques ne sont pas l'objet du calcul logique.

Une P contenant des variables réelles est dite *conditionnelle*.

P. ex. la P : soient a et b des nombres ; on a $ab = ba$
est catégorique. La P : $ab = ba$
est conditionnelle ; elle est satisfaite si a et b sont des nombres ; elle ne l'est pas s'ils sont des nombres complexes d'ordre supérieur, par ex. des quaternions ; elle n'a pas de signification si a et b sont des objets dont on n'a pas défini le produit.

A propos des signes $\exists \supset$ | nous donnerons les règles pour reconnaître, à la position, les variables apparentes.

Dans le langage commun les mots « ceci, cela, le même, premier, deuxième,... » jouent le rôle des lettres variables. On pourrait les remplacer par les nombres 1, 2,... en faisant des conventions opportunes pour ne pas produire des ambiguïtés dans l'Arithmétique. Voir F1897 p.26.

·2. On écrit un point là où l'on fait la division. Si à cette place on a déjà un point, on écrira un nouveau point, et ainsi de suite. Si $a, b, c, ...$ désignent des signes quelconques, les groupements:

a.bc *ab.c* *ab.cd* *a:bc.d* *ab.cd:e.fg.·.hk.l*

seront identiques à

$a(bc)$ $(ab)c$ $(ab)(cd)$ $a[(bc)d]$ $\{[(ab)(cd)][e(fg)]\}[(hk)l]$

Nous donnons la préférence aux parenthèses dans les formules algébriques et dans les formules composées comme les algébriques, et aux points pour séparer les propositions partielles d'un théorème; car dans ce cas les parenthèses seraient absolument encombrantes.

Pendant longtemps on a indiqué le groupement des parties d'une formule par une barre horizontale supérieure ou inférieure, dite *vinculum* (Chuquet, Leibniz, ...). Selon cette convention les groupements précédents seront indiqués par

abc *abc* *abcd* *abcd* *a b c d e f g h k l*

Cette convention, très claire, présente quelque difficulté typographique. Elle ne se rencontre plus aujourd'hui que dans les fractions et les racines.

Si l'on complète les vinculums, en les écrivant aussi sous une lettre seule, on voit qu'il y a autant de points que d'espaces vides dans les vinculums; les points sont les compléments des vinculums.

La suite de trois lettres peut être décomposée dans les deux formes écrites; la suite de quatre lettres *abcd* dans les 5 formes:

a : bc . d *a : b . cd* *ab . cd* *a . bc : d* *ab . c : d*,

et en général la suite de n lettres peut être décomposée en $(2n)!/[n!(n+1)!]$ combinaisons binaires différentes. (F1894 §10).

Plusieurs conventions ont pour but de supprimer des divisions: P5·0, 9·1, §∪ P1·1, §– P1·2-·4, §∃ P1·01, §+ P5·2, §< P1·02 ...

Pour les faire mieux ressortir, nous donnerons aux signes des dimensions différentes, et nous nous aiderons des espaces typographiques.

Les parenthèses et les points sont des signes de l'écriture commune, bien que l'usage soit différent; dans les langages ordinaires le groupement des mots est indiqué par la construction.

Les symboles du Formul. ont une signification constante. En adoptant les parenthèses pour grouper les parties d'une formule, on ne pourra pas les adopter dans une autre signification. Nous ne pourrons pas indiquer par (a) une puissance de a, avec Girard a.1629 (voir §Q P53n), ou la partie entière de a, ou la valeur absolue de a, ou une fonction de a. En général une lettre seule ne sera jamais renfermée entre parenthèses, car elle n'est pas groupée.

·3. Le symbole Cls a la forme K dans F1889 et dans les travaux de plusieurs Auteurs. Il a la valeur du mot «ὅρος» d'Aristote, «terminus» des scolastiques; et correspond aussi à «idée générale, nom commun, ...» du langage ordinaire, et aux expressions «ensemble, Menge» des mathématiciens.

Leibniz prend pour exemples les classes de points, ou figures; ce sont des segments de droite dans PhilS. t.7, p.229, 236, ... et des cercles dans ses manuscrits conservés à la bibliothèque de Hannover, *Philosophie*, t.7 fasc. B.4. fol.1-3.

Ces figures ont été aussi adoptées par Euler, a.1768, et par d'autres.

Dans l'Arithmétique les symboles suivants représentent des Cls :

N ou N_1 = « nombre entier positif »

Np = « nombre premier »

et par une convention générale :

$a+N$ = « a plus un N » ou « nombre plus grand que a »

$a \times N = N \times a$ = « multiple de a »

N^2 = « nombre carré »

N^2+N^2 = « somme de deux carrés ».

Dans le F, les symboles simples n R r infn ϑ Q q θ Θ pnt vct quaternio indiquent aussi des Cls.

Les signes 0 1 2 ... X e π C i désignent des individus. Sur la relation entre individus et classes, voir §ι.

·4. ε est la lettre initiale du mot ἐστί.

Exemples : $9 \varepsilon N^2$ $13 \varepsilon N^2+N^2$ $2^{61}-1 \varepsilon Np$

Sur la possibilité de remplacer le signe ε par une autre convention voir F1897 note à la P2.

·5. On peut lire le signe $\ni$ par le mot « qui ».

Exemple : $1 \varepsilon x \ni (x^2-3x+2=0)$

« l'unité est une racine de l'équation entre parenthèses ».

Autres ex. :

§quot P1·0 §Dvr P1·0 §mp P2·6 §ϑ P·0 §Med P1·0 §λ P1·0 §q' P4·0...

Dans la formule $x \ni p$, la lettre x est apparente.

Les deux signes $x\varepsilon$ et $x\ni$ représentent des opérations inverses.

Si l'on écrit le signe $x\varepsilon$ en avant d'une Cls, on a une P contenant la variable x ; réciproquement si l'on écrit le signe $x\ni$ en avant d'une P de cette nature, on obtient une Cls.

Les Cls et les P conditionnelles ne sont donc que deux formes pour représenter la même idée. Nous préférons opérer sur les Cls. Une P conditionnelle, contenant une variable x, sera considérée sous la forme $x\varepsilon a$, où a est une Cls.

·6. Dans la notation (x,y), très répandue en Analyse lorsqu'il s'agit de fonctions de plusieurs variables, les parenthèses sont nécessaires, pour ne pas produire des ambiguïtés avec la notation P4·0.

On peut les supprimer dans la notation $(x;y)$, où les parenthèses ont la valeur expliquée par la P1·2.

$x;y;z$ indique le système des trois variables x, y, z, qu'on peut considérer comme le couple formé par $(x;y)$ et z. Voir P9·1.

Soit p une P contenant deux variables x et y ; $(x;y)\ni p$ représente la classe des couples $(x;y)$ qui satisfont à la condition p.

Si a est une Cls de couples, $(x;y)\varepsilon a$ représente une relation entre les deux objets x et y, et toute relation entre les deux variables sera ici écrite sous la forme $(x;y)\,\varepsilon\, a$.

Ex : $(3/5\,;\,4/5)\ \varepsilon\ (x;y)\ni(x^2+y^2=1)$

signifie « le couple $(3/5\,;\,4/5)$ satisfait à l'équation $x^2+y^2=1$ ».

·7. La P $a \supset b$, qu'on peut aussi lire « la classe a est contenue dans la b » est dite « universelle affirmative ».

Aristote a exprimé la relation $a \supset b$ par une périphrase (Voir P4·4); Leibniz par « a est b », et par $a |\overline{\ } b$. Segner a. 1740 et Lambert a. 1765 respectivement par $a < b$ et $a > b$; car le signe $\supset$ correspond au signe $<$ ou $>$, ou mieux à $\leqq$ ou $\geqq$, de l'Algèbre, selon que dans la classe on considère le nombre des individus qui la composent, ou le nombre des idées qui la déterminent.

Le signe $\supset$, qu'on peut lire « est contenu », est une déformation de $\mathfrak{c}$, lettre initiale renversée du mot « contient ».

Il a été introduit par Gergonne a.1816. Voir RdM. t.6 p.183.

Les signes ε et $\supset$ ont des propriétés différentes; la relation $\supset$ est transitive, la ε ne l'est pas (P4·4); la ε est distributive par rapport à $\cup$, la $\supset$ ne l'est pas (§$\cup$ P4·0); la ε est commutative avec $-$, la $\supset$ ne l'est pas (§$-$ P1·5). Une autre différence est donnée par §$\exists$ P1·1. Les signes ε et $\supset$ sont liés par des relations, dont la plus importante est §ι P·2.

Dans la formule $p \supset q$, p s'appelle Hypothèse, abrégé en Hyp ou Hp, et q la thèse, abrégé en Ths.

On sous-entend les indices à $\supset$, lorsqu'il est le seul signe de déduction; ou lorsqu'il représente la déduction principale, qui porte le plus grand nombre de points à ses côtés; ou si le théorème a la forme $p \supset (q \supset r)$. Les indices sous-entendus sont toutes les variables réelles contenues dans l'Hp.

Les lettres qui, exprimées ou sous-entendues, figurent comme indices au signe $\supset$ sont apparentes dans la déduction.

Opérer par $x\varepsilon$ sur la P universelle $a \supset b$
signifie la transformer dans la déduction $x \varepsilon a \,.\supset_x .\, x \varepsilon b$
« de la condition $x \varepsilon a$ on déduit par rapport à x la $x \varepsilon b$ ».

Opérer par $x \ni$ sur la déduction $p \,.\supset_x .\, q$
signifie la transformer dans la P universelle $(x \ni p) \supset (x \ni q)$

Ex. $6N \supset 2N$ « tout multiple de 6 est pair ».

Opérons par $x\varepsilon$; on a : $x \varepsilon 6N \,.\supset.\, x \varepsilon 2N$,
où l'indice x au signe $\supset$ est sous-entendu.

Ex. $a \varepsilon \mathrm{Np} \,.\supset.\, (a-1)!+1 \,\varepsilon\, N \times a$

Le signe $\supset$ se rencontre aussi entre P, sans porter des indices: P7·01.

Quelquefois, dans les démonstrations, le signe $\supset$ lie deux théorèmes, et ne porte pas d'indices. C'est alors une abréviation du mot « on déduit ». Cette abréviation se rencontre sous la forme ·.· dans Pell (v. RdM. t.6 p.123), et sous la forme $\mathfrak{c}$ dans Abel t.1 p.36. Dans ce cas on peut considérer les signes des idées primitives comme indices à $\supset$.

Dans le F, lorsqu'on rencontre l'expression $x \varepsilon a$, a est toujours une Cls. Analoguement dans la formule $a \supset b$, si un membre est une Cls, l'autre l'est aussi. On pourrait remplacer la P·4 par « $x \varepsilon a$ signifie a est une Cls, et x est un a », c'est-à-dire ajouter la P : $x \varepsilon a \,.\supset.\, a \varepsilon \mathrm{Cls}$ {F1889P52}

Voir Padoa RdM. t.6 p.105.

·8. Le signe $\frown$, qu'on peut lire « *et* », et qu'on appelle signe de la multiplication logique, est en général sous-entendu entre des P.

Ex. $(2\mathrm{N})\frown(3\mathrm{N}) \supset 6\mathrm{N}$ $\qquad$ $6\mathrm{N} \supset (2\mathrm{N})\frown(3\mathrm{N})$

$\mathrm{Np}\frown(4\mathrm{N}+1) \supset \mathrm{N}^2+\mathrm{N}^2$ $\qquad$ Girard a. 1634 p. 156 :

« Tout nombre premier qui excède un nombre quaternaire de l'unité se peut diviser en deux quarrez entiers. »

$a \varepsilon \mathrm{N} \,.\supset.\, a(a+1) \,\varepsilon\, 2\mathrm{N} \,.\, a(a+1)(a+2) \,\varepsilon\, 6\mathrm{N}$

$a \varepsilon \mathrm{N} \,.\, a^2 \,\varepsilon\, \mathrm{N}^3 \,.\supset.\, a \,\varepsilon\, \mathrm{N}^3$ $\qquad$ $a \varepsilon \mathrm{N} \,.\, a < 17 \,.\supset.\, a^2-a+17 \,\varepsilon\, \mathrm{Np}$

Dans ces ex. l'indice a au signe $\supset$ est sous-entendu.

$a \varepsilon \mathrm{Np} \,.\, b \varepsilon \mathrm{N}+1 \,.\supset.\, b^{a-1}-b \,\varepsilon\, \mathrm{N}\times a$ $\qquad$ { Fermat }

Ici le signe $\supset$ porte les indices sous-entendus a et b.

Ex. où $\supset$ a des indices explicites :

$s \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\, 1 \varepsilon s : x \varepsilon s \,.\supset_x.\, x+1 \,\varepsilon\, s :\supset.\, \mathrm{N} \supset s$ $\qquad$ (principe d'induction)

§+ 4·3 §− 3·2 4·0 §/ 3·2 5·0 32·1·2·5·6·9 §Num ·23·24 §mlt 1·0 §mp 1·5 ...

·9. Le signe d'égalité a la forme $\propto$ ou ∞, déformation de la lettre initiale de *æqualis*, de Viète à Leibniz ; la forme $=$ de Recorde a.1557, (*The Whetstone of witte or the second part of arithmetike*) a été probablement empruntée aux Mss. du moyen âge dans lesquels il signifie « est ». Voir Henry *Revue Archéologique* a.1879 t.38 p.5. Cette forme adoptée par Wallis et Newton, est devenue ensuite d'usage universel.

La plus grande partie des propositions contenues dans le Formul. s'exprime par les seuls signes de logique ε, $\supset$, et $\frown$ (sous-entendu), combinés avec les signes algébriques.

Le symbole Cls nous est nécessaire dans les propositions de Logique ; le signe $\ni$ nous explique le double rôle du signe $\supset$ entre classes et entre propositions ; le système de variables se rencontre comme indice au signe $\supset$.

✻ 2. *Définitions*

Df signifie « définition ».

Dfp » « définition possible ».

Une Dfp est une égalité qui contient dans un membre un signe qui ne figure pas dans l'autre, ou qui y figure dans une position différente. Nous la dirons aussi « possible absolument ».

Si les deux membres contiennent des lettres variables, et s'il faut limiter la signification de lettres, l'égalité suit une Hp.

Supposons ordonnés les signes qui représentent les idées d'une science.

Une Df possible absolument d'un signe, sera aussi possible relativement à l'ordre fixé, si elle exprime le signe par les précédents.

Dans ce cas, on peut la prendre comme Df du signe. S'il y a plusieurs définitions possibles du signe, relativement à l'ordre fixé, on choisira la plus commode comme définition réelle.

Une idée, qui n'a pas de définition possible, relativement à un ordre fixé, s'appelle « idée primitive » relativement à cet ordre.

Il convient de donner aux idées d'une science un ordre tel que le nombre des idées primitives soit le plus petit.

Les idées primitives sont ici expliquées par le langage ordinaire, et sont déterminées par des Pp (P primitives) ; celles-ci jouent le rôle de définitions par rapport aux idées primitives, mais n'en ont pas la forme.

Une définition est vraie par convention. Sa raison d'être est un fait historique, ou la volonté de l'Auteur. On ne peut pas en donner une démonstration mathématique.

Toute définition doit être « homogène », c'est-à-dire :

a) Les deux membres de l'égalité qui constitue la Df doivent contenir les mêmes variables réelles ;

b) Si l'on définit une fonction nouvelle de fonctions connues des lettres, le second membre doit contenir seulement les dernières fonctions.

Tout signe ou mot rigoureusement défini peut être supprimé en le remplaçant par sa valeur ; autrement dit, toute Df exprime une abréviation théoriquement non nécessaire, mais commode, et quelquefois pratiquement nécessaire pour le progrès de la science. Cette suppression d'un signe défini est un excercice très utile à faire, dans quelques propositions, à fin de vérifier si les définitions sont justes.

Si l'on n'arrive pas à remplacer partout le signe défini par sa valeur, on déduit que la définition n'est pas énoncée en forme exacte.

P. ex. sont des Dfp du nombre « e » les §e P1·0·01·03·61 2·2, et aussi la 1·62 un peu transformée ; aucune autre P du même § n'a le caractère de Dfp.

Dans le F nous désignerons par Dfp seulement celles qu'on pourrait prendre commodément comme Df.

Sont sans Hp les Df des individus : 1 2 3 ... ∞ e *C* i *π*,
et des Cls : N_1 n R r infn Np *ϑ* Q q q'.

Ont une Hp les Df de + > − × / ↾ Num *Σ* *Π* ! C mod max quot rest E *β* Dvr mlt mp *Φ* l' Log Med *λ* lim D ∫ sin ...

Ex. de Dfp : §+ 8·6 §> 2·4·7 §— 7·7 §× 2·0 §/ 3·01 15·01 32·5·9...

Quel que soit l'ordre fixé, il y a nécessairement des idées primitives, car on ne peut pas définir la première idée, ni le signe $=$, qui figure dans toute définition.

Si l'on change l'ordre des idées d'une science, une P qui jouait le rôle de Df peut se transformer en une Dfp; une idée, qui était primitive relativement au premier ordre, peut être définie, et réciproquement.

Padoa, dans sa conférence au congrès international de Philosophie (Paris 3 Août a.1900), a proposé des règles pour réconnaître l'irréductibilité d'un système de symboles par rapport à un système de Pp.

Nous rencontrons trois idées primitives dans l'Arithmétique (§+P1); et trois dans la Géométrie (§ vct P1·0, 2·0 et 8·0).

Plusieurs A. appellent « définitions » des P qui n'ont pas la forme de nos « Df », lesquelles sont alors dites « définitions nominales ». Selon d'autres, « Definitio » est le second membre de l'égalité, dont le premier est le signe qu'on définit.

Une Df doit être une P complète, intelligible même détachée du texte. Quelques A. appellent « définition » la formule qui figure dans la P, et qui est une partie de la Df; alors il y a la crainte que l'idée qu'on veut définir se rencontre déjà dans les Hp, ou dans les parties non écrites ; ce qui peut arriver notamment en Logique pure.

P. ex. la P incomplète $a-a=0$ n'est pas une Dfp.

La § – P1·41 : $a \varepsilon \mathrm{N} . \supset . a-a=0$ est une P complète, vraie, et non une Dfp, car un membre contient la variable réelle a, qui ne figure pas dans l'autre.

Si l'on considère comme une bonne Df la P citée, il faudrait aussi considérer comme telle la P $a,b \varepsilon \mathrm{N} . \supset . a-b=1$, qui a la même forme, et qui, étant fausse, serait vraie par définition.

La P (§ vct 3·1): $0=$ « valeur constante de $a-a$, où $a\varepsilon$N, ou un vct, » est une Dfp. La lettre a dans le second membre est apparente.

Les §/ P5·2, 12·2 sont des égalités qui contiennent dans les deux membres es mêmes lettres réelles ; on ne peut pas les prendre comme Df de la somme et du produit de deux R ; car si $a,b,c,d \varepsilon$N, la somme $(a/b)+(c/d)$ doit être définie comme fonction de a/b et de c/d, et non de a,b,c,d. Le rapport a/b est fonction de a et b, mais non réciproquement.

P. ex. on ne peut pas définir une opération μ (moyen) par la P :

$a,b,c,d \varepsilon \mathrm{N} . \supset . (a/b) \mu (c/d) = (a+c)/(b+d)$, car on déduirait :

$(1/2 \mu 2/3) = (3/5)$; $(2/4 \mu 2/3) = (4/7)$, d'où l'absurdité $3/5 = 4/7$.

Analoguement les §Num ·51·61 ne sont pas des Dfp.

Présentent quelques difficultés les définitions « par abstraction », où l'on définit l'égalité de la même fonction de deux variables, sans définir cette fonction. Ont cette forme les §Num ·0, §l' 2·0 §vct 7·1.

Ex. de Df « par induction »: §+ 3·1·2, 10·1·2, Df×, DfΣ.

Ex. de Df où les deux membres sont connus: § – P2·4, §Subst 1·4.

* 3. *Démonstrations*

Dem ou Dm signifie « démonstration ». En général les démonstrations sont renfermées entre [ ].

En supposant ordonnées les P d'une science, une Dm doit déduire une P des précédentes. Une P peut avoir plusieurs démonstrations ; il peut arriver que l'on puisse déduire une P d'autres qui la suivent ; on pourrait appeler « démonstrations possibles » ces déductions ; elles deviennent des démonstrations si l'on change l'ordres des P. Ex.: §∪ P2·6, §ι ·61.

Les P dont la Dm manque, s'appellent Pp (propositions primitives). Si dans une science il y a des idées primitives, il y aura aussi des Pp, qui fixent la valeur des premières.

Une P est primitive, si l'on ne l'a pas démontrée. Dans plusieurs cas on prouve qu'un système de n Pp est irréductible ; pour ce but on donne aux idées primitives n interprétations différentes de la réelle, et telles que chacune satisfasse à toutes les Pp, une à la fois exceptée. Voir §+.

Dans quelque cas on prouve seulement que chaque Pp est indépendante des précédentes ; on en prouve « l'indépendance ordonnée ». Voir § vct.

Les démonstrations, dans les sciences mathématiques, sont composées d'une suite de propositions convenablement liées.

Ces P ne diffèrent des théorèmes que par leur moindre importance. Nous pouvons donc les exprimer complétement en symboles.

La liaison entre les P est indiquée dans le langage ordinaire par « on déduit », que nous traduirons par ⊃. C'est une forme de raisonnement.

Les lois de logique, contenues dans la suite, ont été en général trouvées en énonçant, sous forme de règles, les déductions qu'on rencontre dans les démonstrations mathématiques.

Parmi les règles plus importantes il y a le syllogisme, la composition, l'exportation, l'importation, la substitution, et la simplification.

Soient p, q, r, s des propositions.

·1. Syll, abréviation de Syllogisme, indique la forme

$$p \supset q \,.\, q \supset r \,.\supset.\, p \supset r \,.$$

Si les propositions sont réduites à la forme $x \varepsilon a$, où a est une Cls, le syllogisme est exprimé par la P4·4. Mais nous appliquerons le Syll même lorsqu'il s'agit de P non encore réduites à la forme $x \varepsilon a$.

·2. Cmp (composer) indique la forme

$$p\supset q \,.\, p\supset r \,.\!\supset\!.\, p\supset qr \,.$$

Voir P5·4. En combinant les raisonnements Cmp et Syll, on a la forme :

P5·61 $$p\supset q \,.\, p\supset r \,.\, qr\supset s \,.\!\supset\!.\, p\supset s \,.$$

·3. Importer signifie passer de la proposition $p\supset.q\supset r$ à la $pq\supset r$. En réunissant les hypothèses, on réunit aussi les indices au signe $\supset$.

·4. Exporter indique la transformation inverse. Voir P9·3.

Par ex. soit la P : $a\varepsilon \mathrm{N} \,.\, b\varepsilon\, \mathrm{N}\times a \,.\, c\varepsilon\, \mathrm{N}\times b \,.\!\supset\!.\, c\varepsilon\, \mathrm{N}\times a$

où le signe $\supset$ porte les indices sous-entendus a,b,c.

Export .$\supset$: $a\varepsilon \mathrm{N} \,.\, b\varepsilon\, \mathrm{N}\times a \,.\!\supset\!:\, c\varepsilon\, \mathrm{N}\times b \,.\!\supset_c .\, c\varepsilon\, \mathrm{N}\times a$

Opérons par $c\ni$: $a\varepsilon \mathrm{N} \,.\, b\varepsilon\, \mathrm{N}\times a \,.\!\supset\!.\, \mathrm{N}\times b \supset \mathrm{N}\times a$.

·5. La substitution consiste à remplacer dans un théorème a de la forme $p\supset_{x,y\ldots} q$, les lettres variables $x,y,\ldots$ par des expressions constantes ou variables $a,b\ldots$; on désigne par

$$(a,b,\ldots) \mid (x,y,\ldots)\ \mathrm{P}a$$

la nouvelle P. Le signe | sera étudié dans son §.

·6. Toute P doit être écrite sous sa forme la plus simple. Si l'on effectue une substitution dans une P, il peut arriver que la nouvelle P ne se présente pas sous la forme la plus simple ; il faut la simplifier comme suit :

a) Si l'Hp ne contient plus de lettres variables, et si elle est vraie, on la supprime, et l'on affirme la Ths. Voir P4·3.

P. ex. soit la P $x\varepsilon\, \mathrm{Np} \,.\!\supset\!.\, (x-1)!+1\ \varepsilon\ \mathrm{N}\times x$ (*a*)

$(11 \mid x)\mathrm{P}a$:$\supset$: $11\varepsilon\, \mathrm{Np} \,.\!\supset\!.\, 10!+1\ \varepsilon\ \mathrm{N}\times 11$

Simplif .$\supset$. $10!+1\ \varepsilon\ \mathrm{N}\times 11$.

b) Si dans l'Hp il y a comme facteur logique une P vraie, on la supprime.

Ex. De la P: $a,b\varepsilon \mathrm{N} \,.\!\supset\!.\, (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ (*a*)

$(1 \mid b)\mathrm{P}a$. Simplif .$\supset$: $a\varepsilon \mathrm{N} \,.\!\supset\!.\, (a+1)^2 = a^2+2a+1$.

Si l'on exporte la P vraie, la règle *b*) est conséquence de la règle *a*).

c) Réciproquement on peut unir à l'Hp des P vraies.

Soit a un théorème : Hp . a .$\supset$. Ths est donc une forme abrégée de

$$a \,.\!\supset\!:\, \mathrm{Hp} \,.\!\supset\!.\, \mathrm{Ths}.$$

d) Si dans l'Hp il y a comme facteur logique une P conséquence des autres, on la supprime.

e) Si dans l'Hp il y a un facteur logique non nécessaire, on le supprime.

f) Réciproquement on peut ajouter à l'Hp des facteurs non nécessaires ; cela revient à dire que de l'affirmation simultanée de plusieurs propositions, on peut déduire l'affirmation de chaque proposition. Voir P5·3.

D'autres formes de raisonnement seront indiquées par un nom :

Distrib(ε,$\cap$)	Oper$\cap$	Comm$\cap$	Assoc$\cap$	Distrib($\supset$,$\cap$)	Distrib($\ni$,$\cap$)
P5·1	5·5	6·2	6·3	7·3	8·2
istrib(ε,$\cup$)	Oper$\cup$	Comm$\cup$	Assoc$\cup$	Distrib($\cap$,$\cup$)	Distrib($\ni$,$\cup$)D
§$\cup$ 4·0	1·5	2·2	2·3	3·1	4·1
Transp	Oper$\exists$	Eliminer.			
§– 2·3·4 3·7·71 4·2	§$\exists$ 1·21	2·1			

Les P de logique sont en général évidentes. Les démonstrations n'ont pas pour but de nous assurer de la vérité de ces P, mais seulement de réduire plusieurs de ces modes de raisonnement à d'autres plus simples.

Dans le Formul. une démonstration est réduite à une suite de transformations, suivant des régles mentionnées, de l'Hp dans la Ths. Ces transformations sont analogues aux règles algébriques pour résoudre un système d'équations.

La classification des propositions en primitives et en dérivées, et la démonstration de l'indépendance absolue ou ordonnée des premières, a été faite pour différentes branches, à l'aide des symboles logiques dans RdM. a.1891 p.93, a.1894 p.52, par Burali-Forti RdM. a.1893 p.79, a.1899 p.141, Padoa RdM. a.1895 p.185 note, Pieri TorinoM. a.1898 t.48 p.60, etc.

✻ 4. $\supset$ ε

·0 $a \varepsilon \mathrm{Cls} .\supset: x,y \varepsilon a .=. x \varepsilon a . y \varepsilon a$ Df

« Soit a une classe ; nous écrirons $x,y\varepsilon a$, qu'on lira "x et y sont des a" au lieu de $x\varepsilon a . y\varepsilon a$ ».

La formule $x,y,z\varepsilon a$ signifie $x,y\varepsilon a . z\varepsilon a$ " x et y sont des a, z est un a ", qu'on lira " x, y, z sont des a "; et ainsi de suite quel que soit le nombre des sujets.

Ex. $2^2-1,\ 2^3-1,\ 2^5-1\ \varepsilon\ \mathrm{Np}$

$a,b\varepsilon \mathrm{N} .\supset. ab=ba . a^2+b^2 \gtreqless 2ab$

·1 $a,b\varepsilon \mathrm{Cls} .\supset.\because a\supset b .=: x\varepsilon a .\supset_x . x\varepsilon b$ Dfp { F1889 P50 }
{ Oper $x\varepsilon$ } { Oper $x\ni$ }

Cette P relie les deux fonctions du signe $\supset$ entre Cls et entre P, et exprime les règles « opérer par $x\varepsilon$, ou par $x\ni$ ». Voir P1·7.

Si l'on considére le signe $\supset$ entre P comme une idée primitive, la P·1 définira le même signe entre Cls.

Réciproquement on pourrait essayer de prendre comme idée primitive la valeur du signe $\supset$ entre Cls, et d'en déduire la valeur entre les conditions $x\varepsilon a$ $x\varepsilon b$ par la même P·1. Mais cette P contient déjà le signe $\supset$ avec la signification « on déduit » entre l'Hp et la Ths.

·2 $a\varepsilon \mathrm{Cls} .\supset. a\supset a$ { Leibniz voir P5·3 }

·3 $a,b\varepsilon \mathrm{Cls} . a\supset b . x\varepsilon a .\supset. x\varepsilon b$ { F1889 P55 }

[P·1 $.\supset.$ $a,b\varepsilon \mathrm{Cls} . a\supset b .\supset: x\varepsilon a .\supset_x . x\varepsilon b$ (1)

(1) . Import $.\supset.$ P]

Appelons p et q les conditions $x\varepsilon a$ $x\varepsilon b$. Par la P·1, la P·3 devient : $p\supset q . p .\supset. q$ « si de p on déduit q, et si la p est vraie, la q sera vraie ».

Cette forme de raisonnement est une espèce de syllogisme.

·4 $a,b,c\varepsilon\,\mathrm{Cls}\,.\,a\supset b\,.\,b\supset c\,.\supset.\,a\supset c$ { Syll }

{ ARISTOTELES, *Analytica Priora*, lib. I, cap. IV:

« *Εἰ τὸ Α κατὰ παντὸς τοῦ Β, καὶ τὸ Β κατὰ παντὸς τοῦ Γ, ἀνάγκη τὸ Α κατὰ παντὸς τοῦ Γ κατηγορεῖσθαι.* » }

{ LEIBNIZ Mss. *Philosophie* VIIB 4 fol.17 :

« Nota Γ aut vox *est*. *e*Γ*d* sive *d*⅂*e*. Si *e*Γ*d* et *d*Γ*a* tunc *e*Γ*a*. » }

Cette P exprime le « syllogisme » abrégé en Syll.

Soit xay une relation entre les objets x et y. Elle est dite « transitive » si $xay\,.\,yaz\,.\supset.\,xaz$.

Le Syll dit que la relation $\supset$ est transitive. La relation ε ne l'est pas. P. ex. de $7\varepsilon\,\mathrm{Np}$

et $\mathrm{Np}\,\varepsilon$ (ensemble infini illimité dénombrable)

on ne peut pas tirer de conséquence. On dit que ε a le sens composé (sensus compositi), et $\supset$ le sens divisé (sensus divisi). $x\varepsilon a$ dit que a est une propriété de x ; $x\supset a$ dit que a est une propriété des individus de la classe x.

·5 $a,b,c,d\varepsilon\,\mathrm{Cls}\,.\,a\supset b\,.\,b\supset c\,.\,c\supset d\,.\supset.\,a\supset d$

[Hp . Syll $.\supset.$ $a\supset c\,.\,c\supset d$. Syll $.\supset.$ Ths]

·6 $a,b,c\varepsilon\,\mathrm{Cls}\,.\supset\colon a\supset b\supset c\,.=.\,a\supset b\,.\,b\supset c$ Df

Cette abréviation se rencontre dans quelques démonstrations.

✻ 5. $\supset$ $\frown$

·0 $a,b\varepsilon\,\mathrm{Cls}\,.\supset\colon\; ab = a\frown b \;:\; x\varepsilon\,ab \,.=.\, x\varepsilon\,(ab)$

$a,b,c\varepsilon\,\mathrm{Cls}\,.\supset\colon\; abc = (ab)c \;:$

$ab = c \,.=.\, (ab) = c \;:\; a = bc \,.=.\, a = (bc) \;:$

$ab\supset c \,.=.\, (ab)\supset c \;:\; a\supset bc \,.=.\, a\supset(bc)$ Df

Ces conventions ont pour but de sous-entendre le signe $\frown$ et des parenthèses.

·1 $a,b\varepsilon\,\mathrm{Cls}\,.\supset\colon x\varepsilon\,a\frown b \,.=.\, x\varepsilon a \,.\frown.\, x\varepsilon b$ Dfp { Distrib(ε, $\frown$) }
{ F1889 P47 }

Cette égalité est une Dfp (définition possible), car le signe $\frown$ figure dans le premier membre entre Cls, et dans le second entre P. Si l'on suppose connue sa valeur entre P, on en déduira la valeur de la formule $x\varepsilon\,ab$; mais pour avoir dans le premier membre ab seul, il est encore nécessaire de faire la transformation indiquée par la P8·2.

Réciproquement si l'on considère comme une idée primitive le produit ab de deux Cls, on déduira la valeur du produit logique entre les P $x\varepsilon a$ et $x\varepsilon b$. Mais l'Hp $a,b\varepsilon$ Cls, d'après la P4·0 est déjà le produit logique de deux P.

Soient xay et $x\beta y$ deux fonctions de x,y. L'opération a est dite distributive par rapport à la β, si l'on a

$$x a (y \beta z) = (x a y) \beta (x a z) \qquad \{\text{Distrib}(a,\beta)\}$$

ou

$$(y \beta z) a x = (y a x) \beta (z a x)$$

Le signe à droite indique le théorème qui exprime cette propriété.

P. ex. l'opération arithmétique $\times$ est distributive par rapport à $+$.

L'opération ε, dont le résultat est une P, est donc distributive par rapport à $\frown$.

Ex. De la P : $\quad \text{Np} \frown (4\text{N}+1) \supset \text{N}^2+\text{N}^2$

Opér $x\varepsilon$. Distrib$(\varepsilon, \frown)$.$\supset$: $\quad x \varepsilon \text{Np} \,.\, x \varepsilon 4\text{N}+1 \,.\supset.\, x \varepsilon \text{N}^2+\text{N}^2$.

·2 $a,b \varepsilon \text{Cls} \,.\supset.\, ab \,\varepsilon\, \text{Cls}$ { F1897 P22 }

·3 $a,b \varepsilon \text{Cls} \,.\supset.\, ab \supset a$ ·31 $\text{Hp ·3} \,.\supset.\, ab \supset b$

{ Leibniz, Specimen calculi universalis, *PhilS.* t.7 p.218 :
« a est a » « ab est a » « ab est b. » }

·4 $a,b,c \varepsilon \text{Cls} \,.\, a \supset b \,.\, a \supset c \,.\supset.\, a \supset bc$ { Cmp }

{ Leibniz Id. p.222 :

« Diversa praedicata in unum conjungi possunt, ut si constet a esse b, itemque aliunde constet a esse c, poterit dici a esse bc. » }

Elle exprime la forme de raisonnement dite « composition » (Cmp).

·5 $a,b,c \varepsilon \text{Cls} \,.\, b \supset c \,.\supset.\, ab \supset ac$ { Oper $\frown$ }

{ Leibniz Id. p.222 :

« Si b est c, tunc ab erit ac. Quod ita demonstratur : ab est b, b est c, ergo ab est c, per regulam consequentiarum primam. ab est c, ab est a, ergo ab est ac per demonstrata supra. » }

[$a,b,c \,\varepsilon\, \text{Cls} \,.\, b \supset c \,.\, \text{P·31} \,.\supset.\, ab \supset b \,.\, b \supset c \,.\, \text{Syll} \,.\supset.\, ab \supset c$ (1)
» » » . $\text{P·3} \,.\, (1) \,.\supset.\, ab \supset a \,.\, ab \supset c \,.\, \text{Cmp} \,.\supset.\, ab \supset ac$]

Cette P, analogue à §× P4·1, s'appelle « opérer par $\frown$ ».

La démonstration est la traduction exacte de celle donnée par Leibniz.

L'Analyse de cette dem. est contenue dans RdM. t.7 p.18.

·6 $a,b,c,d \varepsilon \text{Cls} \,.\, a \supset b \,.\, d \supset c \,.\supset.\, ad \supset bc$

{ Leibniz Id. p.223 :

« Si a est b, et d est c, tunc ad erit bc. Hoc est praeclarum theorema, quod demonstratur hoc modo :
a est b, ergo ad est bd per priora,
d est c, ergo bd est bc rursus per priora,
ad est bd, et bd est bc, ergo ad est bc. Quod erat demonstrandum. » }

{ McColl a.1878 P9 }

[$\text{Hp} \,.\, \text{P·5} \,.\supset.\, ad \supset bd \,.\, bd \supset bc \,.\supset.\, \text{Ths}$]

·61 $a,b,c,d \varepsilon$ Cls . $a \supset b$. $a \supset c$. $bc \supset d$.$\supset$. $a \supset d$ {F1897 P35}
[Hp . Cmp .$\supset$. $a \supset bc$. $bc \supset d$. Syll .$\supset$. Ths]

·62 ———————. $ab \supset c$. $ac \supset d$.$\supset$. $ab \supset d$ {F1897 P37}
[Hp .$\supset$. $ab \supset ac$. $ac \supset d$.$\supset$. Ths]

·63 ——— — —. $a \supset b$. $bc \supset d$.$\supset$. $ac \supset d$ {F1895 P115}
[Hp .$\supset$. $ac \supset bc$. $bc \supset d$.$\supset$. Ths]

·7 $a,b,c \varepsilon$ Cls .$\supset$. $a \frown (b \frown c) = (a \frown b) \frown (a \frown c)$ { Distrib ($\frown$,$\frown$) }
L'operation $\frown$ est *auto-distributive.* Voir §- 2·62.

✻ 6·0 $a,b \varepsilon$ Cls .$\supset$: $a = b$.=. $a \supset b$. $b \supset a$ Dfp

{ LEIBNIZ *PhilS.* t.7 p.225 :
« Si a est b, et b est a, tunc a et b dicuntur esse idem .» }
{ McCOLL P7 : $(a=b)=(a:b)(b:a)$ }

Cette P exprime l'égalité de deux classes par le signe $\supset$. Le signe = se rencontre nécessairement dans toute définition, et ne peut pas être défini. Si l'on veut considérer cette P comme une Df il faut regarder le deuxième signe = comme lié avec le signe Df. Leur ensemble signifie « est égal par définition » ou « nous posons ». Il n'est plus le même signe qui figure dans $a=b$. Ex : $(2N) \frown (3N) = 6N$
« les nombres multiples de 2 et multiples de 3 sont multiples de 6 ».

$N \frown x \ni (3x-2 \; \varepsilon \; 5N) = 5N-1$

« Les nombres x qui rendent $3x-2$ multiple de 5 s'obtiennent de la formule $5y-1$, en y remplaçant y par tous les N ».

·1 $a \varepsilon$ Cls .$\supset$. $a = aa$ { LEIBNIZ Mss. VII p.3 : « $AA \infty A$ » }
[$(a,a,a)|(a,b,c)$P5·4 . Simpl .$\supset$: $a \varepsilon$ Cls .$\supset$. $a \supset aa$ (1)
$(a|b)$P5·3 . Simpl .$\supset$: $a \varepsilon$ Cls .$\supset$. $aa \supset a$ (2)
(1) . (2) . Cmp . P·0 .$\supset$. P]

·2 $a,b \varepsilon$ Cls .$\supset$. $ab = ba$ { Comm $\frown$ }
{ LEIBNIZ Mss. VIIB2 p.3 : « $AB \infty BA$ » }

Soit xay une fonction de x et y. L'opération a est dite commutative si l'on a $xay = yax$ { Comm a }
La P·2 exprime la commutativité de l'opération $\frown$.
[Hp . P5·3 . P5·31 .$\supset$. $ab \supset b$. $ab \supset a$. Cmp .$\supset$. $ab \supset ba$ (1)
Hp . $(b,a)|(a,b)$P(1) .$\supset$. $ba \supset ab$ (2)
(1) . (2) .$\supset$. P]

·3 $a,b,c \varepsilon$ Cls .$\supset$: $a(bc) = (ab)c = abc$ { Assoc $\frown$ }
{ BOOLE a.1854 p.29 }

On dit que l'opération α est associative, si

$(x\alpha y)\alpha z = x\alpha(y\alpha z)$ | Assoc α |

L'opération $\frown$ est associative.

[Hp . P5·3 .$\supset$. $(ab)c \supset ab$. $ab \supset a$.$\supset$. $(ab)c \supset a$ (1)

» » » . $ab \supset b$.$\supset$. $(ab)c \supset b$ (2)

» » $(ab)c \supset c$. (2) . Cmp .$\supset$. $(ab)c \supset bc$ (3)

(1) . (3) . Cmp .$\supset$. $(ab)c \supset a(bc)$]

✻ 7.

Soient p, q, r des P contenant une variable, ou un système de variables x.

·0 $p .=_x. q$ signifie $p .\supset_x. q : q .\supset_x. p$.

·01 $p .\supset_x: q .\supset. r$ signifie $pq .\supset. r$.

·02 $p .\supset_x: q .=. r$ signifie $p .\supset_x: q .\supset. r : r .\supset. q$.

Ces P s'énoncent symboliquement :

·1 $a,b \varepsilon$ Cls .$\supset$.·. $x\varepsilon a .=_x. x\varepsilon b :=. a=b$ Df

·11 $a,b,c \varepsilon$ Cls .$\supset$:: $x\varepsilon a .\supset_x: x\varepsilon b .\supset. x\varepsilon c$.·.=. $ab \supset c$ Df

·12 $a,b,c \varepsilon$ Cls .$\supset$:: $x\varepsilon a .\supset_x: x\varepsilon b .=. x\varepsilon c$.·.=. $ab \supset c . ac \supset b$ Df

Dans la formule $p .=_x .q$, la lettre x est apparente. On sous-entend l'indice au signe = lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté à craindre. Voir P1·7.

Ex. $a\varepsilon$ Np .=. $a\varepsilon$ N+1 . $(a-1)!+1 \varepsilon$ N$\times a$

§— 5·5 §/ 8·6 14·1 40·1-·3,·5-·8 ...

Dans ces exemples l'indice au signe = est toujours sous-entendu.

Dans la formule $p .\supset_x : q .\supset. r$, le premier $\supset$ porte l'indice x qui peut être sous-entendu; le deuxième ne porte pas d'indice.

Des deux formes $p\supset.q\supset r$ et $pq\supset r$, la deuxième est plus simple, lorsqu'il s'agit d'une proposition seule; mais la première est plus commode lorsqu'on a une longue suite de propositions qui ont une Hp commune; alors on peut mettre en évidence cette Hp, et l'écrire une seule fois.

Ex.: §/ 4·6·7 11·2-·4.

La P·11 exprime, dans un cas particulier, la règle de l'exportation.

Ex. de la ·02: $a,b,c\varepsilon$N .$\supset$: $a=b$.=. $a+c=b+c$

$a,b\varepsilon$N .$\supset$: $a^2+b^2 \varepsilon$ 3N .=. $a\varepsilon$ 3N . $b\varepsilon$ 3N

·2 $a,b\varepsilon$ Cls .$\supset$: $a\supset b$.=. $a=ab$ Dfp

| Leibniz *PhilS.* t.7 p.214: « Omne A est B id est $AB \infty A$. » |

Cette P transforme $a\supset b$ en une égalité. Le signe $\supset$ y figure aussi pour séparer l'Hp de la Ths. Voir F1897 P52 note.

[$a,b\varepsilon$ Cls . $a\supset b$. P4·2 .$\supset$. $a\supset a$. $a\supset b$. Cmp .$\supset$. $a\supset ab$ (1)

$a,b\varepsilon$ Cls . $a\supset b$. (1) . P5·3 .$\supset$. $a\supset ab$. $ab\supset a$. P4·0 .$\supset$. $a=ab$ (2)

» » $a=ab$. P5·31 .$\supset$. $a\supset b$ (3)

(2) . (3) .$\supset$. P]

·3 a,b,cε Cls .⊃: a⊃bc .=. a⊃b . a⊃c } Distrib(⊃,∩) {
} McColl a.1878 P12: «(x : A) (x : B) (x : C) = (x : ABC).» {
[a,b,cε Cls . a⊃bc . P5·3·31 .⊃. a⊃b . a⊃c (1)
(1) . Cmp .⊃. P]

·4 a,b,cε Cls . ab⊃c . ac⊃b .⊃. ab = ac }F1897 P55{
[Hp .⊃. ab⊃ac . ac⊃ab .⊃. Ths]

Ex. Appelons a, b, c les trois équations
$x+y=m$ $xy=n$ $(x-y)^2=m^2-4n$
Par des règles algébriques on a ab⊃c ac⊃b ; on déduit l'équivalence des systèmes ab et ac (mais non de ab et bc).

✻ 8.

·1 aε Cls .⊃. xɜ(xεa) = a Dfp }F1889 P58{

Cette égalité a le caractère d'une Dfp, car le signe ɜ figure dans le premier membre et non dans le second. Mais, contrairement aux autres Df, le premier membre est plus compliqué que le second. Dans la pratique on écrit le signe xɜ en avant d'une P réductible, mais non réduite, à la forme xεa.

·2 a,bε Cls .⊃. a∩b = xɜ(xεa .∩. xεb) Dfp } Distrib(ɜ,∩) {
}F1889 P60{
[P5·1 . Oper xɜ .⊃. P]
Cette P dit que l'opération ɜ est distributive par rapport à ∩.

·3 aε Cls .⊃. a = xɜ(uε Cls . a⊃u .⊃ᵤ. xεu) }F1897 P61{
[P4·3 .⊃ a,uε Cls . a⊃u . xεa .⊃. xεu (1)
(1) . Export .⊃ aε Cls .⊃.·. xεa .⊃ₓ : uε Cls . a⊃u .⊃ᵤ . xεu (2)
(2) . Oper xɜ .⊃ aε Cls .⊃. a⊃ xɜ(» ») (3)
aε Cls : uε Cls . a⊃u .⊃ᵤ . xεu :⊃: aε Cls . a⊃a :⊃: xεa (4)
(4) . Export . Oper xɜ .⊃ aε Cls .⊃. xɜ(uε Cls . a⊃u .⊃ᵤ . xεu) ⊃ a (5)
(3) . (5) .⊃. P]
Ex. §∪ 2·1 Dm . 2·6 Dm . §− 3·8 Dm.

✻ 9.

·1 (x;y;z) = [(x;y);z] Df }F1898 P70'{

·2 (x;y) = (a;b) .=. x=a . y=b Dfp }F1897 P71{
Sur cette P voir RdM t.6 p.65, p.119.

·3 a,b,cε Cls .⊃::
xεa .⊃ₓ: (x;y)εb .⊃ᵧ. (x;y)εc .·.=: xεa . (x;y)εb .⊃ₓ,ᵧ. (x;y)εc
}F1894 §18 P2; 1897 P74{

Considérons une condition contenant une variable x, et deux conditions contenant deux variables x et y. Nous écrirons la première sous la forme $x \varepsilon a$, où a est une Cls ; et les deux dernières sous la forme $(x;y)\varepsilon b$ et $(x;y)\varepsilon c$, où b et c sont des Cls de couples. Alors la déduction

$$x\varepsilon a \,.\, (x;y)\varepsilon b \,.\supset_{x,y}.\, (x;y)\varepsilon c$$

est identique à la

$$x\varepsilon a \,.\supset_x :\, (x;y)\varepsilon b \,.\supset_y .\, (x;y)\varepsilon c$$

La P·3 est l'expression symbolique des règles « exporter » et « importer » dont nous avons parlé dans les « démonstrations » P3·4. Un cas particulier est la P7·11.

Ex. dans les Dém. des §/ P4·1 §λ P1·2 § Lm P1·1 1·4

·4 $a,b,c \varepsilon \text{Cls} \,.\supset ::$
$x\varepsilon a \,.\supset_x :\, y\varepsilon b \,.\supset_y .\, (x,y)\varepsilon c \;.\!\cdot\!.=.\!\cdot\!.\; y\varepsilon b \,.\supset_y :\, x\varepsilon a \,.\supset_x .\, (x,y)\varepsilon c$
{ Peirce a.1880 p.24 : $(x \prec (y \prec z)) = (y \prec (x \prec z))$ }

Le signe $\prec$ de Peirce signifie $\supset$.

·5 $a,b,c,d \varepsilon \text{Cls} \,.\supset ::$
$x\varepsilon a \,.\supset_x :\, y\varepsilon b \,.\, (x;y)\varepsilon c \,.\supset_y .\, (x;y)\varepsilon d \;.\!\cdot\!.=.\!\cdot\!.$
$y\varepsilon b \,.\supset_y :\, x\varepsilon a \,.\, (x;y)\varepsilon c \,.\supset_x .\, (x;y)\varepsilon d$
[Import . Export .$\supset$. P]

D'autres identités où figurent des relations entre plusieurs variables sont contenues dans §ꟻ P2.

* 10.

·1 $x=x$ { Ex. §+ 6·1 }

·2 $x=y \,.\supset.\, y=x$

·3 $x=y \,.\, y=z \,.\supset.\, x=z$

Ces trois propriétés de l'égalité sont indépendentes. Voir §vct P2·1·2·3. et RdM. t.1 p.127, t.2 p.113, p.161. Une preuve simple est formée par les exemples suivants, indiqués par M. Vacca. Les trois relations entre nombres (1+N) :

$$D(x,y) > 1, \quad x \varepsilon N \times y, \quad x,y \varepsilon Np$$

satisfont respectivement aux conditions ·1·2, ·1·3, ·2·3 et non à ·3, ·2, ·1.

Il y a des relations, différentes de l'égalité, et qui satisfont aux conditions ·1·2·3. Sont telles les relations géométriques :

« la droite x est parallèle à la y »

« la figure x est superposable à la y »

« la figure x est semblable, ou projective, à la y ».

Elles sont réductibles à l'égalité ou identité, indiquée par le signe $=$, entre des fonctions ou des abstractions des objets considérés ; p. ex. « direction de x = direction de y », « aire de x = aire de y », « forme de x = forme de y », etc.

Voir F1894 §39. I. Zignago nous communique que si la relation $x a y$ satisfait aux conditions ·1·2·3, elle est réductible à l'égalité entre Cls :

$$x a y \;.=.\; z\ni(z a x) = z\ni(z a y)$$

Si la relation est algébrique, voir IdM. a.1900 p.37, 315.

·4 $x = y = z \;.=.\; x = y \,.\, y = z$ Df

exprime une abréviation très connue.

·5 $a \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\, x \varepsilon a \,.\, y = x \;.\supset.\; y \varepsilon a$ { F1895 §4 P10 }

·6 $x = y \;.=:\; a \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\, x \varepsilon a \;.\supset_a.\; y \varepsilon a$ Dfp { F1897 P80 }

{ Leibniz Id. p.219: « Eadem sunt quorum unum in alterius locum substitui potest, salva veritate. » }

L'égalité $x = y$ signifie « toute classe qui contient x contiendra aussi y », ou « toute propriété de x est une propriété de y » ; ou « la vérité de la proposition $x \varepsilon a$, qui contient x, n'est pas altérée si l'on remplace x par y. »

Cette P est une Dfp, car le second membre ne contient pas le signe $=$ qui figure dans le premier. La difficulté qu'on rencontre à la considérer comme une Df réelle, que le signe $=$ sert déjà dans la définition, peut être écartée par la remarque à la P6·0.

La P·6 ne donne pas toute la signification de $x = y$, car on doit encore définir cette égalité pour les nombres négatifs, rationnels §— 3·2 §/ 3·2 dans les Df par abstraction ; de P·1 on ne peut pas tirer la P6·0. V. F1897 p.39.

Dans les traités d'Arithmétique on a les P

$2/3 = 4/6$ 2/3 est une fraction irréductible 4/6 ne l'est pas

ce qui paraît en contradiction avec la P·5. Ici le signe 2/3 représente d'abord un nombre rationnel, ensuite l'ensemble des trois signes 2 / 3.

·61 Dm P·1 $a \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\, x \varepsilon a \,.\, \mathrm{Simplif} \;.\supset.\; x \varepsilon a \;:\; \mathrm{P}{\cdot}6 \;:\supset.\; \mathrm{P}$

·62 Dm P·2 $\mathrm{P}{\cdot}1 \;.\supset.\; x \varepsilon\, z\ni(z = x) \,.\, \mathrm{P}{\cdot}6 \;.\supset.\; y \varepsilon\, y\ni(z = x) \;.\supset.\; \mathrm{P}$

·63 Dm P·3 $\mathrm{Hp} \;.\supset:\; a \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\, x \varepsilon a \,.\, \mathrm{P}{\cdot}6 \;.\supset.\; y \varepsilon a \,.\, \mathrm{P}{\cdot}6 \;.\supset.\; z \varepsilon a \;:\supset.\; \mathrm{Ths}$

·64 Dm P·5 $\mathrm{P}{\cdot}6 \,.\, \mathrm{Import} \;.\supset.\; \mathrm{P}$ { F1897 P80-84 }

§2 $\cup$ = (ou)

* 1·0 $a,b\varepsilon \mathrm{Cls} .\supset. a\cup b = x\ni(c\varepsilon \mathrm{Cls} . a\supset c . b\supset c .\supset_c . x\varepsilon c)$
{F1897 P241} Df$\cup$

$a\cup b$, qu'on peut lire « a ou b » indique donc la classe des objets qui appartiennent à l'une, au moins, des classes a et b.

L'opération indiquée par le signe $\cup$ s'appelle « addition logique ».

Ex. §Np P2·1 : $\mathrm{Np} \cap (3+\mathrm{N}) \supset (6\mathrm{N}+1)\cup(6\mathrm{N}-1)$

§ϒ 5·1 §Num ·41·5 §max 1·3 §Dvr 1·33 §mlt 1·02·33 §Q 82·8 §λ 1·3...

Leibniz a indiqué l'opération $\cup$ par le signe +, ou par le même signe dans un cercle. Nous ne pouvons pas représenter par un même signe les additions logique et arithmétique, sans produire des ambiguïtés. P. ex. :

$\mathrm{Np}+\mathrm{Np} = 2(\mathrm{N}+1)$, $\quad \mathrm{Np}\cup\mathrm{Np} = \mathrm{Np}$.

Le signe + dans Boole a une signification un peu différente.

·1 $a,b,c\varepsilon \mathrm{Cls} .\supset:$
$ab\cup c = (ab)\cup c : a\cup bc = a\cup(bc) : a\cup b\supset c .=. (a\cup b)\supset c : a\supset b\cup c .=. a\supset(b\cup c) :$
$a\cup b\cup c = (a\cup b)\cup c : x\varepsilon\, a\cup b .=. x\varepsilon(a\cup b)$ Df

·2 $a,b\varepsilon \mathrm{Cls} .\supset. a\cup b\ \varepsilon\ \mathrm{Cls}$

·3 » $a\supset a\cup b . b\supset a\cup b$

{ Leibniz *PhilS.* t.7 p.240 : « N est in A ⊕ N » }

[§1P4·3 $.\supset:$ $a,b,c\varepsilon \mathrm{Cls} . a\supset c . b\supset c . x\varepsilon a .\supset. x\varepsilon c$ (1)
(1) . Export $.\supset:$ $a,b\varepsilon \mathrm{Cls} . x\varepsilon a .\supset: c\varepsilon \mathrm{Cls} . a\supset c . b\supset c .\supset_c . x\varepsilon c$ (2)
(2) . Df$\cup$ $.\supset:$ » » $.\supset. x\varepsilon\, a\cup b$ (3)
(3) . Export $.\supset:$ $a,b\varepsilon \mathrm{Cls} .\supset: x\varepsilon a .\supset_x . x\varepsilon\, a\cup b$ (4)
(4) . Oper $x\ni$ $.\supset.$ P]

·4 $a,b,c\varepsilon \mathrm{Cls} . a\supset c . b\supset c .\supset. a\cup b\supset c$ { Leibniz Id. p.232 : « Si A est in C et B est in C etiam $A+B$ erit in C. » }

[Df$\cup$. Oper $x\varepsilon$ $.\supset:$ $a,b\varepsilon \mathrm{Cls} .\supset\therefore x\varepsilon\, a\cup b .=: c\varepsilon \mathrm{Cls} . a\supset c . b\supset c .\supset_c . x\varepsilon c$ (1)
(1) . Simpl $.\supset\therefore$ $a,b\varepsilon \mathrm{Cls} . x\varepsilon\, a\cup b .\supset: c\varepsilon \mathrm{Cls} . a\supset c . b\supset c .\supset_c . x\varepsilon c$ (2)
(2) . Import $.\supset:$ $a,b,c\varepsilon \mathrm{Cls} . x\varepsilon\, a\cup b . a\supset c . b\supset c .\supset. x\varepsilon c$ (3)
(3) . Export $.\supset\therefore$ $a,b,c\varepsilon \mathrm{Cls} . a\supset c . b\supset c .\supset: x\varepsilon\, a\cup b .\supset_x . x\varepsilon c$ (4)
(4) . Oper $x\ni$ $.\supset.$ P]

·5 $a,b,c\varepsilon \mathrm{Cls} . a\supset b .\supset. a\cup c\supset b\cup c$ { Oper $\cup$ }
{ Leibniz Id. p.239 } { McColl a.1878 P10 }

·6 $a,b,c,d\varepsilon \mathrm{Cls} . a\supset b . c\supset d .\supset. a\cup c\supset b\cup d$ { Leibniz p.232: « Si A est in M, et B est in N, erit $A+B$ in $M+N$. » }

·61 $a\supset b\cup c . b\supset d . c\supset d .\supset. a\supset d$
{ De Morgan *Formal logic* a.1847 p.123 }

✻ 2. $a, b, c \varepsilon \mathrm{Cls} . \supset .$

·1 $a \cup a = a$ { LEIBNIZ Id. p.230:
« Si idem secum ipso sumatur, nihil constituitur novum, seu $A + A \infty A$. »}
[Df $\cup$ $. \supset .$ $a \cup a = x \ni (c \varepsilon \mathrm{Cls} . a \supset c . \supset_c . x \varepsilon c)$. §1P8·3 $. \supset .$ P]

·2 $a \cup b = b \cup a$ { LEIBNIZ Id. p.237 } { Comm$\cup$ }
[Df$\cup$ $. \supset .$ $a \cup b = x \ni (c \varepsilon \mathrm{Cls} . a \supset c . b \supset c . \supset_c . x \varepsilon c)$
Comm $\cap$ $. \supset .$ » » $. b \supset c . a \supset c . \supset_c .$ »
Df$\cup$ $. \supset .$ » $b \cup a$]

·3 $a \cup b \cup c = a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c$ {SCHRÖDER a.1877 P3′} {Assoc$\cup$}
[$(a \cup b) \cup c = x \ni [d \varepsilon \mathrm{Cls} . a \cup b \supset d . c \supset d . \supset . x \varepsilon d]$
$= x \ni [d \varepsilon \mathrm{Cls} . a \supset d . b \supset d . c \supset d . \supset . x \varepsilon d]$
$= x \ni [d \varepsilon \mathrm{Cls} . a \supset d . b \cup c \supset d . \supset . x \varepsilon d]$
$= a \cup (b \cup c)$]

·4 $b \supset a . = . a \cup b = a$ { LEIBNIZ Id. p.232:
« Si B est in A, erit $A + B \infty A$ ... Si $A + B \infty A$, tunc B erit in A. »}

·5 $a \supset c . b \supset c . = . a \cup b \supset c$ [P1·2·3·4 $. \supset .$ P]
{ McCOLL a.1878 p.11 }

·6 P·5 $. \supset .$ P1·0
[§1 P8·3 $. \supset .$ $a \cup b = x \ni (c \varepsilon \mathrm{Cls} . a \cup b \supset c . \supset_c . x \varepsilon c)$
P·5 $. \supset .$ » » » $. a \supset c . b \supset c .$ »)]

De la P1·0, considérée comme Df du signe $\cup$, nous avons tiré les P successives. Réciproquement de la dernière 2·5 on peut déduire la 1·0; et puisque la ·5 est conséquence des P1·2·3·4, on aura une autre façon de traiter cet ensemble de P. On peut introduire l'idée $\cup$ comme primitive, en la déterminant par les P1·2·3·4, qui joueront le rôle de Pp (propositions primitives).

Si l'on remplace $a \supset b$ par $b \supset a$, et $a \cap b$ par $a \cup b$ dans les P :
§1 P5·2·3·4·5·6·61 6·1·2·3 7·2·3
on trouve §2 P1·2·3·4·5·6·61 2·1·2·3 ·4·5

La même substitution dans les démonstrations des premières P, permet de tirer directement les dernières des P1·2·3·4.

Cette correspondence, dite « loi de dualité », a été énoncée par Peirce a.1867.

Une troisième théorie du signe $\cup$ sera indiquée dans §– P3·1.

✻ 3. $a, b, c, d \varepsilon \mathrm{Cls} . \supset .$

·0 $ab \cup ac \supset a(b \cup c)$
[P1·3 $. \supset .$ $b \supset b \cup c . c \supset b \cup c$. Oper $\cap$ $. \supset .$ $ab \supset a(b \cup c) . ac \supset a(b \cup c)$. P1·4 $. \supset .$P]

·01 $a(b \cup c) \supset ab \cup ac$ Pp

Cette P n'est pas conséquence des P précédentes. Pour reconnaître son indépendance, il suffit de donner aux signes Cls, $\cap$, $\cup$ une interprétation qui satisfasse aux P précédentes, mais non à celle-ci. Considérons des points;

par Cls indiquons les classes convexes de points, c'est-à-dire les u telles que Med$u$=u ; au signe $\cap$ conservons sa valeur ; alors, par la Df1·0 , $a\cup b$ indique « la plus petite classe convexe contenant a et b ». Il est aisé de voir que subsistent les propositions précédentes du § $\cup$, et aussi les dualitiques, mais non la nouvelle ·01. Il faut donc, en suivant l'ordre que nous avons ici choisi, la considérer comme une « proposition primitive ». Voir §– P3·5.

·1 $a(b\cup c) = ab \cup ac$ [=. P·0 . P·01] { Distrib($\cap$,$\cup$) }
{ LAMBERT a.1781 p.33:
« Will man aber setzen $(m+n)A$, so ist dieses $= mA+nA$. »}

·11 $(a\cup b)c = ac \cup bc$ [Comm $\cap$. Distrib $\cup$, $\cap$.⊃. P]

·12 $(a\cup b)(c\cup d) = ac \cup ad \cup bc \cup bd$ { LAMBERT id }

·2 $a \cup ab = a$ ·21 $a(a\cup b) = a$ { SCHRÖDER a.1877 P10°10′ }

·22 $(a\cup c)(b\cup c) = ab\cup c$ { Distrib($\cup$,$\cap$) } { PEIRCE a.1867 p.250 }

·23 $(a\cup b)(b\cup c)(c\cup a) = ab \cup bc \cup ca$ { SCHRÖDER a.1890 p.383 }

·3 $a=b$.=. $a\cup b \supset ab$ { SCHRÖDER a.1890 p.382 }

·4 $ac \supset b$. $a \supset b\cup c$.=. $a \supset b$ { PEIRCE a.1880 p.34 }

·41 $ac \supset bc$. $a\cup c \supset b\cup c$.=. $a \supset b$ { SCHRÖDER a.1890 p.362 }

·42 $ac = bc$. $a\cup c = b\cup c$.=. $a=b$ { » a.1877 p.12 }

·43 $a \supset b$. $b \supset c$.=. $a\cup b \supset bc$ { PADOA F1897 }

·5 $a \supset b\cup c$. $ab \supset d$. $ac \supset d$.⊃. $a \supset d$ { PIERI F1897 }

✱ 4. $a,b,c \varepsilon$ Cls .⊃.

·0 $x\varepsilon a$.$\cup$. $x\varepsilon b$.=. $x\varepsilon\, a\cup b$ Df {F1889 P48} {Distrib(ε,$\cup$)}

Cette P exprime la somme logique de deux propositions $x\varepsilon a$ et $x\varepsilon b$ par la P $x\varepsilon\, a\cup b$, où ne figure que la somme de deux classes. Puisque toute P est réductible à la forme $x\varepsilon a$, où x est une variable, ou un système de variables, on aura défini la somme de deux P quelconques.

Ex. §Np P1·2 : $a\varepsilon$ Np . $b,c\varepsilon$N . $b\times c$ ε N$\times a$.⊃. $b\varepsilon$ N$\times a$.$\cup$. $c\varepsilon$ N$\times a$

Ex. §> 2·4·5 §× 1·6 3·4 §↑ 5·5 ...

La P·0 dit que l'opération ε est distributive par rapport à $\cup$. L'opération ⊃ ne l'est pas. En effet de $(N+1)^2 \supset 4N \cup (4N+1)$, on ne peut pas tirer $(N+1)^2 \supset 4N$, ou $(N+1)^2 \supset 4N+1$.

·1 $x\ni(x\varepsilon a$.$\cup$. $x\varepsilon b) = a\cup b$ Dfp {F1889 P62} {Distrib($\ni$,$\cup$)}
[P·0 . Oper $x\ni$.⊃. P]

Cette P exprime la somme logique de deux classes par une somme de P.

·2 $a \supset c$.$\cup$. $b \supset c$.⊃. $ab \supset c$ { McCOLL a.1878 P13 }

·21 $a \supset b$.$\cup$. $a \supset c$.⊃. $a \supset b\cup c$ » » P14

·22 $a \supset c$.$\cup$. $b \supset c$.⊃. $a\cup b \supset c$:=: $a=b$
{ McCOLL *Congrès de Philosophie*, Paris a.1900 }

§3 $\Lambda =$ (classe nulle)

✻ 1·0 $\Lambda = x\ni(a\varepsilon \mathrm{Cls} \,.\supset_a.\, x\varepsilon a)$ DfΛ

Λ indique la classe nulle. Leibniz l'a indiquée par N, initiale de Nihil ; Boole et ses continuateurs par 0. Ce signe se rencontre rarement dans le F, où il est exprimé par les signes - et $\exists$. Nous le conservons ici, car il permet de traiter quelques théories logiques. Ex:

$N^3\frown(N^3+N^3) = \Lambda$ « il n'y a pas de cubes, sommes de deux cubes ».

·1 $\Lambda\, \varepsilon\, \mathrm{Cls}$ { F1897 P436 }

·2 $a\varepsilon \mathrm{Cls} \,.\supset.\, \Lambda \supset a$ { F1888 §2 P13 }

[DfΛ $.\supset\therefore x\varepsilon\Lambda \,.\supset:\, a\varepsilon \mathrm{Cls} \,.\supset_a .\, x\varepsilon a$ (1)
(1). Import $.\supset\therefore x\varepsilon\Lambda \,.\, a\varepsilon \mathrm{Cls} \,.\supset.\, x\varepsilon a$ (2)
(2). Export $.\supset\therefore a\varepsilon \mathrm{Cls} \,.\supset:\, x\varepsilon\Lambda \,.\supset_x .\, x\varepsilon a$ (3)
(3). Oper $x\ni$ $.\supset.$ P]

·3 $a\varepsilon \mathrm{Cls} \,.\supset.\, a\frown\Lambda = \Lambda$ { Boole a.1854 p.48 }
[P·2 . §1 P7·2 $.\supset.$ P]

·4 $a\varepsilon \mathrm{Cls} \,.\supset:\, a\supset\Lambda \,.=.\, a=\Lambda$ { F1889 P38 }
[P·2 $.\supset.$ P]

·5 $a\varepsilon \mathrm{Cls} \,.\supset\therefore\, a=\Lambda \,.=:\, b\varepsilon \mathrm{Cls} \,.\supset_b .\, a\supset b$ Dfp
{ F1897 P300 }

$a,b,c,d\varepsilon \mathrm{Cls} \,.\supset.$

·6 $a\supset b \,.\, b=\Lambda \,.\supset.\, a=\Lambda$ [P·4 . Syll $.\supset.$ P]

·7 $a\supset b \,.\, bc=\Lambda \,.\supset.\, ac=\Lambda$ { Aristoteles id. id. }

·8 $a\supset c \,.\, b\supset d \,.\, cd=\Lambda \,.\supset.\, ab=\Lambda$ { De Morgan a.1847 p.123 }

$\smile\Lambda$ ✻ 2. $a,b,c,d\varepsilon \mathrm{Cls} \,.\supset:$

·1 $a\smile\Lambda = a$ { Boole a.1854 p.47 }
[Hp . P1·2 $.\supset.$ $\Lambda\supset a$. §$\smile$ P2·4 $.\supset.$ Ths]

·2 $a\smile b=\Lambda \,.=.\, a=\Lambda \,.\, b=\Lambda$ { Boole a.1854; F1888 §6 P9 }
[P1·4 $.\supset:$ $a\smile b=\Lambda \,.=.\, a\smile b\supset\Lambda$
§$\smile$ P2·5 $.\supset:$ » $.=.\, a\supset\Lambda \,.\, b\supset\Lambda$
P1·4 $.\supset:$ » $.=.\, a=\Lambda \,.\, b=\Lambda$]

·3 $a=\Lambda \,.\smile.\, b=\Lambda \,.\supset.\, ab=\Lambda$ { F1895 §3 P11 }

·4 $a\smile b = a\smile c \,.\, a\frown b=\Lambda \,.\, a\frown c=\Lambda \,.\supset.\, b=c$

·5 $a \cup b = c \cup d \,.\, a = c \,.\, ab = \wedge \,.\, cd = \wedge \,.\supset.\, b = d$

{LEIBNIZ Id. p.234: « Si $A + B \infty C + D$ et $A \infty C$, erit $B \infty D$, modo A et B itemque C et D sint incommunicantia. » }

·6 $a \cup b \supset c \cup d \,.\, c \supset a \,.\, d \supset b \,.\, ab = \wedge \,.\supset.\, a \supset c \,.\, b \supset d \,.\, cd = \wedge$

{ HAUBER a.1829 §291 }

·61 Hp ·6 $.\supset.\, a = c \,.\, b = d$

·7 $a \supset b \cup c \,.\, ab = \wedge \,.\supset.\, a \supset c$ { DE MORGAN a.1847 p.122 }

Une remarque curieuse est la suivante. Remplaçons :

$x \varepsilon$ Cls par $x \varepsilon$N

$a \supset b$ » $a \leqq b$, ou par « a est un diviseur de b »

$a \cap b$ » « le plus petit des nombres a et b » ou par « le plus grand commun diviseur entre a et b »

$a \cup b$ » « le plus grand des nombres a et b » ou par « le plus petit multiple commun entre a et b »

$\wedge$ » 1

Subsisteront toutes les P précédentes qui ne contiennent que les signes indiqués, comme les §1 P4·4·5 P5·2-·7 P6·0-·3 P7·2·3·4 ... P. ex. la §$\wedge$ P2·7, par la deuxième substitution devient :

« Si le nombre a divise le plus petit multiple commun entre b et c, et s'il est premier avec b, il divise c ». Voir §mlt 1·8.

§4 - = (non)

✻ 1·0 Soit a une Cls; $-a$ indique la Cls des “non a”.

·01 Soit p une proposition; $-p$ désigne sa négation.

Ex. de la négation d'une Cls, §Np P1·0 :

$$\mathrm{Np} = (\mathrm{N}+1)-[(\mathrm{N}+1)\times(\mathrm{N}+1)] \qquad \mathrm{Df.}$$

« Nombre premier signifie nombre (supérieur à l'unité), non décomposable dans le produit de deux nombres ».

Dans ce cas, et dans §+ 8·6·7 §/ 37 §⌃ 35 §max 1·0 §Dvr 2·45 §Np 3·9 9·1 §l' 5·0·6·7 §D 3·1 §log 1·1·3 §q_n 2·0 §Subst 3·0 5·4 §q' 10·3 §sin 8·7 §vct 8·83 39·1·2·3·4 on a toujours l'expression $b-a$, où la classe a est contenue dans b.

Dans §δ 1·0 §Lm 4·0 la classe a n'est pas nécessairement contenue dans b.

On ne rencontre pas l'expression isolée $-a$.

Ex. de la négation d'une P:

§⌃ 9·01 : $a,b \varepsilon \mathrm{N} \,.\, -(a=b) \,.\supset.\, a^2+b^2 > 2ab$.

Autres ex: §+ 8·4·5 §> 2·6·7 §/ 40·1·3·4 41 §⌃ 9·51·52 §Num ·11·3 §Σ 21·2 §quot 3·4 §Dvr 2·6 §Np 12·3 §lim 16·12 §q' 2·5 4·2 10·5 §π 5·2 §sin 2·0·2 ... Il accompagne aussi le signe ꓱ.

Nous avons cité presque toutes les P du F contenant le signe -. On voit que leur nombre est très petit.

Le signe de négation se rencontre sous la forme du signe — de l'Arithmétique, avec lequel il présente quelques analogies formelles, dans Leibniz, Segner, Boole,..., avec la même valeur, ou avec des valeurs semblables. Dans quelques travaux il a la forme ∽.

Nous ne donnons pas ici une définition symbolique de la négation ; nous la considérons comme une idée primitive, dont la valeur est déterminée par les propositions primitives 2·1·2·3.

Les P3·8, §ι P·6 indiquent la possibilité d'autres théories, où la négation est définie ; dans F1897 P363 et 433 sont indiquées deux autres théories; mais elles ne sont pas développées.

·1 $a \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\supset.\, -(x \varepsilon a) = x \varepsilon -a$ Dfp

·11 » $-a = x \ni -(x \varepsilon a)$ Dfp

Les P lient le double rôle de la négation entre P et entre Cls; la ·1 exprime la négation d'une P par la négation d'une classe ; la ·11 exprime la négation d'une classe par la négation d'une P. Il suffit donc de considérer l'une des P·0·01 comme exprimant une idée primitive, et prendre une des P·1·11 comme Df.

Pour supprimer des parenthèses on fait les conventions suivantes:

·2 $x -= y \,.=.\, -(x=y)$ Df

$a,b \varepsilon \mathrm{Cls} .\supset:$ ·3 $x -\varepsilon a .=. -(x \varepsilon a)$ Df

·31 $x,y -\varepsilon a .=. x -\varepsilon a . y -\varepsilon a$ { Ex. §Np P5·2-·4 } Df

·4 $x \varepsilon -a .=. x \varepsilon (-a) : a-b = a \frown -b : -a \supset b .=. (-a) \supset b : -a = b .=. (-a) = b$ Df

·5 $x \varepsilon -a .=. x -\varepsilon a$ [P·1 . P·3 .Ɔ. P] { Comm(ε,-) }

On dit qu'une opération α est commutable avec la β si $\alpha\beta x = \beta\alpha x$. Cette P dit que les opérations ε et - sont commutables. L'opération Ɔ n'est pas commutable avec la -. En effet de $-(\mathrm{Np} \supset 2\mathrm{N}+1)$ « il n'est pas vrai que tous les nombres premiers soient impaires » (car $2 \varepsilon \mathrm{Np}$), on ne déduit pas $\mathrm{Np} \supset -(2\mathrm{N}+1)$, « tous les nombres premirs sont pairs ».

{ ·1-·5 F1889 P46, 61, ... }

✱ 2. $a,b,c \varepsilon \mathrm{Cls} .\supset.$ ·1 $-a \varepsilon \mathrm{Cls}$ Pp

·2 $-(-a) = a$ { Leibniz Mss. viiB 2 p.3 : « $A \infty \overline{non\ non\ A}$ » } Pp

·3 $ab \supset c .\supset. a-c \supset -b$ { Transposer } Pp

·4 $a \supset b .\supset. -b \supset -a$ »

{ Leibniz Mss. *Phil.* viiB 2 fol.17 : « *A* est *B* ergo non*B* est non*A* » }
[Hp .Ɔ. $(-b)a \supset a . a \supset b .\supset. (-b)a \supset b$. P·3 .Ɔ. $(-b)(-b) \supset -a$. Simplif .Ɔ. Ths]

Nous appelons « transposer » l'application des P·3·4, par l'analogie qu'elles présentent avec la transposition des termes dans une égalité ou inégalité algébrique. La règle ·3 est appelée quelquefois « la loi des inverses ». Nous appelons aussi « transposer » les règles P3·7·71, et 4·2.

La P·4, conséquence des précédentes, remplace la Pp·3 dans les Dm des P·5·51·52 3·1 ...

·5 $a \supset b .=. -b \supset -a$ { F1888 P8 }
[P·4 . $(-b,-a)|(a,b)$ P·4 .Ɔ. P]

·51 $a = b .=. -a = -b$ [P·5 .Ɔ. P]

·52 $a = b .=. a \supset b . -a \supset -b$ { F1897 P118 }

·53 $a-(ab) = a-b$ { F1897 P117 }

·54 $a-b = b-a .=. a = b$ { Vailati RdM. a.1891 p.103 }

·6 $ab \supset c .=. a-c \supset -b$ { Peirce a.1880 p.35 }
[P·3 . $(-c,-b)|(b,c)$ P·3 .Ɔ. P]

·61 $a,b,c \varepsilon \mathrm{Cls} . ab \supset c . a-b \supset c .\supset. a \supset c$

·62 $(a-b)c = (ac)-(bc)$ { Boole a.1854 p.34 } { Distrib($\frown$,-) }

Cette P, comparée avec Distrib($\frown$,$\frown$), Distrib($\frown$,$\smile$), dit que si $f(a,b,\ldots)$ est une fonction des Cls $a,b,\ldots$ composée par les opérations logiques $x \frown y$, $x \smile y$, $x-y$, on aura $f(a,b,\ldots) \smile l = f(a \frown l, b \frown l, \ldots)$.

·63 $ab = ac .=. a-b = a-c$ { Whitehead a.1898 p.40 }

$\cup$ ✻ 3. $a,b,c,d,x \varepsilon \mathrm{Cls} \;.\supset.$

·1 $a \cup b = -[(-a) \cap (-b)]$ Dfp

[§1 P5·3 $.\supset.\; ab \supset a \,.\, ab \supset b$. Transp $.\supset.\; -a \supset -(ab) \,.\, -b \supset -(ab)$ (1)

(1) . §$\cup$ P1·4 $.\supset.\; -a \cup -b \supset -(ab)$ (2)

$(-a\,, -b)|(a,b)$ (2) $.\supset.\; a \cup b \supset -[(-a)(-b)]$ (3)

§$\cup$ P1·3 $.\supset.\; a \supset a \cup b \,.\, b \supset a \cup b$. Transp $.\supset.\; -(a \cup b) \supset -a \,.\, -(a \cup b) \supset -b$.

Cmp $.\supset.\; -(a \cup b) \supset (-a)(-b)$. Transp . $-[(-a)(-b)] \supset a \cup b$ (4)

(3) . (4) $.\supset.$ P]

·2 $-(a \cup b) = (-a)(-b)$ [P·1 $.\supset.$ P]

·3 $a \cap b = -[(-a) \cup (-b)]$ Dfp [$(-a\,, -b)|(a,b)$ P·2 $.\supset.$ P]

·4 $-(ab) = -a \cup -b$ [P·3 $.\supset.$ P]

{ ·1-·4 De Morgan a.1858 p.208 ; Schröder a.1877 p.18 }

·5 P2·1·2·3 . P3·1 $.\supset.$ §$\cup$ P3·01 { F1897 P215 }

[$a,b,c \varepsilon$ Cls $.\supset.\; ab \supset ab \,.\, ac \supset ac$. Transp $.\supset.\; a-(ab) \supset -b \,.\, a-(ac) \supset -c$.

Cmp . $a-(ab)-(ac) \supset -b-c$. Transp $.\supset. a-(-b-c) \supset -[-(ab)-(ac)]$. P·1 .

$\supset.\; a(b \cup c) \supset ab \cup ac$]

La P·1 exprime l'opération $\cup$ par les $\cap$ et $-$; dans F1897 on l'a prise comme Df. La P·5 dit que de la ·1, et des propriétés de la négation on déduit la §$\cup$ P3·01, qui se présente ici comme Pp.

·6 $a = ab \cup a-b$ { Lambert a.1781 p.11 : « $a = ax + a|x$ » }

·7 $a-b \supset c \;.=.\; a \supset b \cup c$ { Peirce a.1867 } { Transp }

[Transp $.\supset:\; a-b \supset c \;.=.\; -b-c \supset -a \;.=.\; a \supset b \cup c$]

·71 $ab \supset c \cup d \;.=.\; a-c \supset d \cup -b$ { Transp }

{ Peirce a.1880 p.36 : $(a \times b \prec c+d) = (a \times \overline{d} \prec c + \overline{b})$ }

·8 $a-b = x \ni (c \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\, a \supset b \cup c \,.\supset_c .\, x \varepsilon c)$ Dfp { F1897 P257 }

[§1 P8·3 $.\supset.\; a-b = x \ni (c \varepsilon$ Cls $.\, a-b \supset c \,.\supset_c .\, x \varepsilon c)$

P·7 $.\supset.$ » » $.\, a \supset b \cup c$ »]

La P·7 contient dans un membre le signe $-$ qui ne figure pas dans le second ; on peut la transformer dans la P·8, qui est une définition possible de l'expression $a-b$.

Si l'on prend la ·8 comme Df, il ne faut plus considérer le signe $-b$, isolé, qui effectivement ne se rencontre pas dans les applications. En conséquence il faut modifier l'énoncé de quelques P précédentes. P. ex. la P2·4 doit être transformée en $a,b,c \varepsilon$ Cls . $a \supset b \;.\supset.\; c-b \supset c-a$.

Il y a cet avantage à prendre la ·8 comme Df, qu'on supprime la négation du nombre des idées primitives ; mais de la ·8 comme Df, et des P des §§ précédents on ne sait pas déduire les P de ce §. Voir un essai dans F1897 P258-260.

·9 $(a \cup x)(b \cup -x) = a-x \cup bx$ { Peirce a.1880 p.36 }

·91 $(ax \cup b-x)(cx \cup d-x) = acx \cup bd-x$ { Boole a.1854 }

$\cdot 92 \quad -(ax \cup b\text{-}x) = (-a)x \cup (-b)(-x)$ { Schröder a.1877 p.19 }
$\cdot 93 \quad ab \supset ax \cup b\text{-}x \supset a \cup b$ { Schröder a.1891 p.48 }
$\cdot 94 \quad a \cup b = a \cup b(-a)$ { » a.1890 p.308 }
$\cdot 95 \quad a = b\text{-}c \cup c\text{-}b \,.\supset.\, b = c\text{-}a \cup a\text{-}c$ { Jevons a.1864 p.61 }

Cet A. a indiqué la fonction $a\text{-}b \cup b\text{-}a$ par $a \,_0\, b$; le signe $_0$ correspond au latin *aut* ; le signe $\cup$ à *vel*. Cette opération a de curieuses propriétés développées dans F1895 §3 P24-30, dont la plus importante est la ·95.

Λ ✻ 4. $a, b \,\varepsilon\, \mathrm{Cls} \,.\supset:$ $\cdot 1 \quad a\text{-}a = \Lambda$
{ Leibniz *PhilS.* t.7 p.230 : « seu A—A ∞ N » }
[P3·8 $.\supset.\; a\text{-}a = x\ni(c \,\varepsilon\, \mathrm{Cls} \,.\, a \supset a \cup c \,.\supset_c .\, x \,\varepsilon\, c)$
§$\cup$ 1·3 » $= x\ni(c \,\varepsilon\, \mathrm{Cls} \,.\supset_c .\, x \,\varepsilon\, c) = \Lambda$]

$\cdot 2 \quad a \supset b \,.=.\, a\text{-}b = \Lambda$ Dfp { F1888 §6 P2 } { Transp }
{ Leibniz id. p.212: Omne *A* est *B*, id est ... *A* non *B* est non Ens }
[§Λ P2·1 . §- P3·7 . §Λ P1·4 $.\supset:$
$a \supset b \,.=.\, a \supset b \cup \Lambda \,.=.\, a\text{-}b \supset \Lambda \,.=.\, a\text{-}b = \Lambda$]

$\cdot 3 \quad a = \Lambda \,.=.\, a \supset -a$ Dfp $\cdot 4 \quad a \supset -\Lambda$
[Hp . §- P2·1 $.\supset.\; -a \,\varepsilon\, \mathrm{Cls}$. §Λ P1·2 $.\supset.\; \Lambda \supset -a$. Transp $.\supset.$ P]
$\cdot 5 \quad a - \Lambda = a$ [P·4 . §1 P7·2 $.\supset.$ P]

$\cup \; \Lambda$. ✻ 5. $a, b, c, x \,\varepsilon\, \mathrm{Cls} \,.\supset:$
$\cdot 1 \quad a = b \,.=.\, a\text{-}b \cup b\text{-}a = \Lambda$ { Schröder a.1877 p.175 }
$\cdot 2 \quad a = b \cup c \,.\, bc = \Lambda \,.\supset.\, b = a\text{-}c$ { Boole a.1854 p.35 }
$\cdot 3 \quad ax \cup b\text{-}x = \Lambda \,.=.\, b \supset x \supset -a$
{ Boole p.101; Schröder a.1891 P49 }
$\cdot 4 \quad ax \cup b\text{-}x = \Lambda \,.\supset.\, ab = \Lambda$ { Boole a.1854 p.101 }

La classe $-\Lambda$ a été indiquée par Peirce, AJ. a.1887 et dans F1889 et suivants, par le signe $\vee$, qu'on lit « tout » ou « vrai ». Toute expression fx obtenue en combinant une classe x avec des classes données par les signes $\cap \cup -$ est réductible à la forme : $fx = (f\vee)x \cup (f\Lambda)\text{-}x$
due à Boole, et qui présente quelques analogies avec la formule de Taylor.

La P·3 donne la résolution de toute équation logique.

Avec m classes indépendantes on peut former $2^{(2^m)}$ Cls différentes, et énoncer $2^{[2^{(2^m)}-1]}-2$ propositions. Si $m=1$, on a les 6 P :

$a = \Lambda \qquad -a = \Lambda \qquad a -= \Lambda \qquad -a -= \Lambda$
$a -= \Lambda \,.\, -a -= \Lambda \qquad a = \Lambda \,.\cup.\, -a = \Lambda$

Sur deux classes ($m=2$), on peut énoncer 32766 relations.

Voir ce calcul dans RdM. a.1900 p.41.

Nous indiquons par des signes simples les deux relations $a \supset b$ et $a = b$; quelques A. ont introduit des signes nouveaux pour indiquer d'autres relations moins importantes.

§5 $\exists$ = (existe)

Λ - ✻ 1. $a,b\varepsilon$ Cls $.\supset:$ ·0 $\exists a .=. a -= \Lambda$ Df$\exists$

·01 $\exists ab .=. \exists(ab)$ Df

Soit a une Cls; $\exists a$ signifie « il y a des a, les a existent ». Nous exprimons cette idée au moyen des précédentes par la P·0. Ex :

$\exists$ $N^2 \frown (N^2+N^2)$ « Il y a des nombres carrés, sommes de deux carrés ».

§+7·1 §/ 6·8. La P particulière « quelque a est b » s'exprime, sans conventions nouvelles, par $\exists ab$.

·1 $x\varepsilon a .\supset. \exists a$ { F1889 P53 } {Ex. : §Dvr P1·3}

[Syll $.\supset:$ $a\varepsilon$ Cls . $a=\Lambda$. $x\varepsilon a .\supset. x\varepsilon\Lambda$ (1)

(1) . §- 2·1 . Df Λ $.\supset:$ » » $x\varepsilon -a$ (2)

(2) . Transp . Df $\exists$ $.\supset.$ P]

De $x\supset a$ on ne déduit pas $\exists a$, si l'on n'est pas assuré que $\exists x$ (P1·2).

·2 $a\supset b . \exists a .\supset. \exists b$ [§Λ 1·6 . Transport $.\supset.$ P]

·21 $a\supset b .\supset: \exists a .\supset. \exists b$ { Oper $\exists$ } { F1895 P116 }

« Opérer par $\exists$ » signifie écrire le signe $\exists$ en avant des deux membres d'une déduction. On obtient une déduction de même sens.

·3 $\exists a\frown b .\supset. \exists a . \exists b$ [P·2 $\supset$ P] { F1895 §3 P12 }

·4 $a\supset b .=. \exists$ Cls$\frown c\ni(a=bc)$ Dfp { F1897 P411 }

✻ 2. $a,b,c\varepsilon$ Cls $.\supset.\because$

·1 $(x;y)\varepsilon a .\supset_{x,y}. y\varepsilon b :=: \exists x\ni[(x;y)\varepsilon a] .\supset_y . y\varepsilon b$

{ P·1 = Elim x = (éliminer la variable x)}

Supposons que dans une déduction : Hp $.\supset.$ Ths (1)

l'Hp contienne une variable x, ou un système de variables, qui ne figure pas dans la Ths; le signe $\supset$ porte comme indices x et d'autres variables. Alors la P (1) est réductible à la forme :

(S'il y a des x vérifiant l'Hp) $.\supset.$ Ths (2)

où le signe $\supset$ ne porte plus comme indice x. La transformation de (1) en (2) s'appelle « élimination de x ». Dans la nouvelle Hp la lettre x est apparente. Dans plusieurs cas on peut la faire disparaître.

Ex. dans les Dém. de §> 1·1·2 §Dvr 1·3 §ϑ·8 §λ 1·2 §vct 3·11.

·2 $\exists x\ni \exists y\ni[(x;y)\varepsilon a] .=. \exists y\ni \exists x\ni[(x;y)\varepsilon a] .=. \exists a$

Soit une relation ou condition entre les variables x, y, que nous représentons par $(x;y)\varepsilon a$. Alors dans la P « il y a des x tels qu'il y a des y qui vérifient la condition donnée » on peut permuter les deux variables. On peut la transformer aussi en « il y a des couples $(x;y)$ qui satisfont à la condition ».

·3 $\exists\, y \ni [x\varepsilon a \,.\, (x;y)\varepsilon b] \;.=_x.\; x\varepsilon a \,.\, \exists\, y \ni [(x;y)\varepsilon b]$

La P « il y a des y qui vérifient le produit logique d'une condition en x et d'une en (x, y) » signifie « la condition en x est vérifiée, et il y a des y qui vérifient la condition en y ». Autrement dit, on peut permuter le signe $\exists y \ni$ avec $x\varepsilon a$.

·4 $\exists\, a \cap x \ni \{\exists\, b \cap y \ni [(x;y)\varepsilon c]\} \;.=.\; \exists\, b \cap y \ni \{\exists\, a \cap x \ni [(x;y)\varepsilon c]\}$

·5 $\exists\, (x;y) \ni (x\varepsilon a \,.\, y\varepsilon b) \;.=.\; \exists a \,.\, \exists b$

« Il y a des couples (x, y) qui vérifient le produit logique d'une condition en x par une condition en y » signifie « il y a des x qui satisfont à la première condition, et des y qui satisfont à la deuxième ».

·6 $\exists\, y \ni [x\varepsilon a \,.\supset_x.\, (x;y)\varepsilon b] \;.\supset:\; x\varepsilon a \,.\supset_x.\, \exists\, y \varepsilon [(x;y)\varepsilon b]$

{ ·4-·6 F1889 P66, F1894 §18 ... }

Ces P expriment les principales identités qu'on rencontre entre les systèmes de variables. Remarquons que la P·6 n'est pas invertible. (Elle a été invertie quelque fois par erreur. Voir §lim 19, §cont 1·1).

$\cup$ $-$ ✻ 3. $a,b\varepsilon \mathrm{Cls} \;.\supset:$ ·1 $\exists(a\cup b) \;.=.\; \exists a \,.\cup.\, \exists b$

{ F1895 §3 P10 } { Distrib($\exists$,$\cup$) }

·2 $a \supset b \;.=.\; \exists\, \mathrm{Cls} \cap c \ni (a \cup c = b)$ Dfp { F1897 P412 }

·3 $\exists a \;.=.\; -a \;-=\; a \cup -a$ Dfp { PADOA F1899 }

§6 $\iota =$ (égal à)

·0 $\iota x = y \ni (y = x)$ $\{ =$ (égal à x)$\}$ Df ι

·01 $y \varepsilon \iota x \,.=.\, y \varepsilon (\iota x) : a \supset \iota x \,.=.\, a \supset (\iota x) : a = \iota x \,.=.\, a = (\iota x)$ Df

Dans quelques cas il est utile de décomposer le signe $=$ (est égal à), dans le signe ε (est), et dans un nouveau signe ι (égal à). Ce signe ι est l'initiale du mot ἴσος. En conséquence ιx désigne la classe formée par l'objet x, et $\iota x \smile \iota y$ la classe composée des objets x et y.

$-\iota x$ signifie « différent de x ».

Ex. $\mathrm{Np}\; -\iota 2 \supset 2\mathrm{N}+1$

« tout nombre premier différent de 2 est impair ». Opérons par $x\varepsilon$ (§1 4·1), par Distrib(ε,$\frown$) (§1 5·1), et Comm(ε,-) (§- 1·5). Elle devient:

$$x\varepsilon\,\mathrm{Np} \,.\, x -= 2 \,.\supset.\, x\varepsilon\, 2\mathrm{N}+1$$

Transposons : $x\varepsilon\,\mathrm{Np} \,.\supset.\, x=2 \,.\smile.\, x\varepsilon\, 2\mathrm{N}+1.$

Ex.: §+ 8·3·6 §R 31·1·2 37 41 §↑ 35 §Np 3·21 9·72 §Q 1·3 2·0·2.

Les idées x et ιx sont différentes; si on les confond, par les P·1·2 on arrive à confondre les trois relations ε, $=$, $\supset$.

·1 $y \varepsilon \iota x \,.=.\, y = x$ [$=$ P·0]

·2 $a \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\supset:\, x \varepsilon a \,.=.\, \iota x \supset a$ Dfp

[§1 P10·5 $.\supset:$		$a\varepsilon\mathrm{Cls} \,.\, x\varepsilon a \,.\, y\varepsilon \iota x \,.\supset.\, y\varepsilon a$	(1)
	(1) . Export $.\supset.\cdot.$	$a\varepsilon\mathrm{Cls} \,.\, x\varepsilon a \,.\supset:\, y\varepsilon \iota x \,.\supset_y .\, y\varepsilon a$	(2)
	(2) . Oper $y\ni$ $.\supset:$	$a\varepsilon\mathrm{Cls} \,.\, x\varepsilon a \,.\supset.\, \iota x \supset a$	(3)
§1 P10·1 $.\supset.$		$x\varepsilon \iota x$	(4)
	(4) $.\supset:$	$a\varepsilon\mathrm{Cls} \,.\, \iota x \supset a \,.\supset.\, x\varepsilon \iota x \,.\, \iota x \supset a \,.\supset.\, x\varepsilon a$	(5)
	(3) (5) $\supset$ P]		

La P·2 exprime la P singulière $x\varepsilon a$ sous la forme d'une P universelle, contenant le signe ι.

·3 $\iota x = \iota y \,.=.\, x = y$ [$\iota x = \iota y \,.=.\, \iota x \supset \iota y \,.\, \iota y \supset \iota x \,.=.\, x \varepsilon \iota y$]

·4 $a \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\supset\therefore\, a = \iota x \,.=:\, x\varepsilon a : y \varepsilon a \,.\supset_y .\, y = x$

$\frown$ ·5 $a \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\supset:\, x,y \varepsilon a \,.=.\, \iota x \smile \iota y \supset a$ Dfp

Λ - ·6 $a \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\supset.\, -a = x \ni (\iota x \frown a = \Lambda)$ Dfp

[$-a = x\ni(x\varepsilon -a) = x\ni(\iota x \supset -a) = x\ni(\iota x \frown a = \Lambda)$]

Cette P exprime la négation au moyen des idées Λ et ι, définies par les seules idées du §1. Nous pouvons déduire une des P fondamentales du - :

·61 P·6 $\supset$ §- P2·4

[$a,b\varepsilon\mathrm{Cls} \,.\, a \supset b \,.\supset.\, a \frown \iota x \supset b \frown \iota x$

» » » $(b \frown \iota x = \Lambda) \supset (a \frown \iota x = \Lambda)$

» » » $x\ni($ » $) \supset x\varepsilon($ » $) \,.\supset.\, -b \supset -a$]

$\exists$ ·7 $a \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\supset.\, x \varepsilon a \,.=.\, \exists\, \iota x \frown a$ Dfp [P·6 $\supset$ P]

·8 $\exists\, \iota x$ [$x \varepsilon \iota x$. §$\exists$ 1·1 $.\supset.$ P] $\{$ ·0·1·2·7 F1895 p.116. ·5·6 F1897 P423, 425. ·3·4·8 PADOA RdM. t.6 p.117 $\}$

§7 ℩ = (le)

$\exists\ \iota \quad a\varepsilon \mathrm{Cls} \,.\, \exists a : x,y\varepsilon a \,.\supset_{x,y}.\, x=y \ :\supset:$

·0 $\quad z = ℩a \ .=.\ a = \iota z$ $\quad$ Df℩ $\quad$ {F1897 P430-5}

·01 $\quad b\varepsilon \mathrm{Cls} \ .\supset.\!.\ ℩a\, \varepsilon b \ .=: \ a = \iota x \,.\supset_x.\, x\varepsilon b \ :=:$

$\qquad \exists\, x \ni (a = \iota x \,.\, x\varepsilon b) \ :=:\ \exists\, a \frown b \ :=:\ a \supset b$ $\quad$ Dfp

·1 $\quad ℩a\, \varepsilon a$ $\qquad$ ·11 $\quad \iota(℩a) = a$ $\qquad$ ·12 $\quad ℩(\iota x) = x$

Ex. §− 1·1 §l′ 1·1

Λ $\quad$ ·2 $\quad \Lambda = ℩\, \mathrm{Cls} \frown x \ni [a\varepsilon \mathrm{Cls} \,.\supset_a.\, x \supset a]$ $\quad$ Dfp

Λ - $\quad$ ·3 $\quad \Lambda = ℩\, x \ni [a\varepsilon \mathrm{Cls} \,.\supset_a.\, a\text{-}a = x]$ $\quad$ Dfp

Soit a une classe qui contient un seul individu x. Cela arrive lorsqu'il y a des a, et si deux individus de la classe a sont nécessairement égaux. Dans ce cas $℩a$ (ou $\bar{\iota}\, a$ des travaux précédents), qu'on peut lire " le a ", indique l'individu x qui forme la classe a.

Ex. §− 1·0 : $\qquad a,b\varepsilon \mathrm{N} \,.\, b>a \ .\supset.\ b-a = ℩\, \mathrm{N} \frown x \ni (a+x = b)$

« Soient a et b des nombres, et soit $b>a$. Par $b-a$ on indique *le* nombre qu'il faut ajouter à a pour avoir b ».

La Df℩ a été transformée par Padoa RdM. t.6 p.117, et dans F1899. On n'a pas réussi à donner une Df du signe isolé $℩a$, mais seulement de l'égalité $z = ℩a$. La P·01 exprime la P $℩a\ \varepsilon b$ sous d'autres formes, où ne figure plus le signe ℩ ; puisque toute P contenant le signe $℩a$ est réductible à la forme $℩a\, \varepsilon b$, où b est une Cls, on pourra éliminer le signe ℩ dans toute P.

La P·12 dit que ℩ représente l'opération inverse de ι. Elle a le caractère d'une Dfp car le signe ℩ figure dans le premier membre, et non dans le second. Mais le premier membre est plus compliqué que le second ; on écrit le signe ℩ en avant d'une expression réductible, mais non réduite à la forme ιx.

Voir d'autres remarques dans F1897 p.50.

Ex. §/ 1·0 5·0 7·0 12·0 22·0 25·0 32·2·3·6·7·9 §mod 1·1 §max 1·0 §E 1·0 §l′ 1·0 §Log ·0 §lim 1·0 §S 1·0 §sin 3·0 §vct 3·1·2·3.

§8 ⁝ = (avec)

$a,b,c,d \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\supset:\;$ ·0 $\;a⁝b = (x;y)\ni(x\varepsilon a \,.\, y\varepsilon b)$ Df {F1899}

·01 $(x;y)\ \varepsilon\ (a⁝b) \ .=.\ x\varepsilon a \,.\, y\varepsilon b$ Dfp »

·02 $a⁝b⁝c = (a⁝b)⁝c = (x;y;z)\ni(x\varepsilon a \,.\, y\varepsilon b \,.\, z\varepsilon c)$ Df »

$a⁝b$, qu'on peut lire « a avec b », désigne l'ensemble des couples formés par un objet de la classe a avec un objet de la classe b (tandis que $a;b$ désigne le couple dont les deux éléments sont les classes a et b).

Ex. §Num ·46 : Num N = Num(N⁝N)

« les nombres naturels sont aussi nombreux que leurs couples ».

§lim 19·1·2·6 §∫ 11·1 §Dtrm.

·1 $(a⁝b) \supset (c⁝d) \ .=.\ a\supset c \,.\, b\supset d$

·11 $(a⁝b) = (c⁝d) \ .=.\ a=c \,.\, b=d$

·12 $(a⁝b) = (c⁝d) \ .=.\ (a;b) = (c;d)$

·13 $(a\cap c)⁝(b\cap d) = (a⁝b) \cap (c⁝d)$

·2 $(a\cup c)⁝b = (a⁝b)\cup(c⁝b) \ .\ a⁝(b\cup d) = (a⁝b)\cup(a⁝d)$ {Distrib(⁝ , ∪)}

·21 $(a\cup c)⁝(b\cup d) = (a⁝b) \cup (c⁝b) \cup (a⁝d) \cup (c⁝d)$

$\exists$ ·3 $\exists(a⁝b) \ .=.\ \exists a \,.\, \exists b$

ι ɿ ·4 $(\iota x ⁝ \iota y) = \iota(x;y) \ .\ x;y = ɿ(\iota x ⁝ \iota y)$

·41 $\iota x ⁝ \iota y = \iota z ⁝ \iota t \ .=.\ x;y = z;t$

{·1-·41 Padoa RdM. t.6 p.120, a.1900}

§10 f ɟ = (fonction)

* 1. $a, b, c \,\varepsilon\,$ Cls .⊃∴

·0 $u \varepsilon\, a\text{ɟ}b$.=: $x \varepsilon a$.⊃$_x$. $xu\, \varepsilon b$ Df

·01 $u \varepsilon\, b\text{f}a$.=: $x \varepsilon a$.⊃$_x$. $ux\, \varepsilon b$ Df

Note sur les fonctions.

On peut prononcer « fonction » le signe f et « ef » le signe ɟ.

Ces signes permettent de représenter par les symboles idéographiques les idées de « fonction, correspondance, opération » etc.

P·0 « Soient a et b des classes. Nous dirons que u est un aɟb, lorsque, le signe u écrit après un individu quelconque de la classe a produit un b » (P·01) « et que u est un bfa, lorsque le signe u écrit en avant d'un a produit un b ».

Dans les traités d'Analyse on dit que a est la classe des valeurs de la « variable indépendante », et la classe b contient les valeurs de la fonction.

P. ex. soit x un N; x! (factorielle de x) est un N; donc ! ε NɟN. C'est le seul exemple de fonction ɟ répandu en Analyse.

Les expressions $+a$, $-a$, $/a$, ont les significations « ajouter a », « retrancher a », « diviser par a », et l'on a les P §+ 9·4, § − 1·3, §/ 1·3. Ainsi se présentent naturellement les nombres négatifs et les fractionnaires.

Dans l'usage commun et dans le Form., le signe de fonction précède, en général, la variable.

Ex: mod sgn E β Chf nt dt Φ log sin cos B.

Ici les valeurs de la variable et de la fonction sont des nombres de différentes espèces: N, n, R, Q, q, q'.

Les signes de fonction Num, max, min, Dvr, mlt, l, l$_r$, précèdent des classes de nombres; la valeur de la fonction est un nombre, en général.

Les signes Med λ δ font correspondre des classes de nombres à d'autres classes.

Une fonction de deux variables est quelquefois représentée par un signe écrit devant le couple des variables. Ex. quot, rest, C, mp.

Dans d'autres cas on place le signe de fonction entre les deux variables; ex. $a+b$, $a-b$, $a \times b$, a/b, $a \,\text{ɿ}\, b$; ici a, b, et la valeur de la fonction sont des nombres. Dans $a \cdots b$, $a \dashv b$, $a \frown b$, $a \cup b$, la valeur de la fonction est une Cls. Ont la même forme les « relations » $a = b$, $a \supset b$, $a \varepsilon b$, $a < b$; les signes de relation sont des signes de fonction, dont la valeur est une proposition.

Quelquefois on écrit la variable comme indice à la fonction; nous conviendrons que u_1 u_2 ... ne diffèrent, que par la forme, de $u1$ $u2$ ...

Plusieurs A. ont aujourd'hui l'habitude d'enfermer la variable entre ( ); mais dans la formule $u(x)$ les ( ) n'ont pas la valeur expliquée par §1 P1·2.

car une lettre seule ne doit pas être enfermée. Elles ne sont pas nécessaires, puisqu'on écrit $\log x$ et non $\log(x)$, $f(x+h)$ et non $f((x+h))$; elles ne se trouvent pas dans Lagrange, Abel, ... Dans le langage ordinaire la variable est mise au génitif; c'est cela qu'on veut indiquer par les ( ); Euler PetrNC. a.1768 t.13 p.63, Legendre a.1797 p.135, ... écrivent $f{:}x$, $f{:}(x+h)$, où les (:) correspondent à « de ». Nous supposons le mot « de » incorporé dans le signe de fonction; ainsi « log », signifie « le logarithme de ».

Les signes f et ɟ se présentent nécessairement lorsqu'on indique par une lettre un signe de fonction; c'est-à-dire lorsqu'on considère une expression dont la valeur dépend de la nature d'une fonction, comme Σ Π lim Dtrm D S.

P. ex: $\Sigma(f,u)$, où $u \varepsilon$ Cls, et $f \varepsilon$ qf$u$, c'est-à-dire f est une fonction numérique définie dans la classe u, indique la somme des valeurs de f, lorsque la variable varie dans la classe u.

Pour quelques formes de la classe u la fonction f dans l'usage commun a des noms particuliers:

$n \varepsilon$ N $.\supset.$ q f $1 \cdots n$ = (succession de n quantités)

qf$(1\cdots n \,\text{!}\, 1\cdots n)$ = (fonction numérique de deux variables qui prennent les valeurs de 1 à n) = (lettre qui, munie de deux indices variables de 1 à n représente une quantité) = (matrice d'un déterminant d'ordre n.

q f N = (série, ou suite, de quantités) §Lm §lim.

q f(N!N) = (série double) §lim P19.

qf$a \dashv b$ = (fonction réelle définie dans l'intervalle de a à b) §cont P2.

On pourrait convenir d'écrire toujours le signe de fonction en avant de la variable (f), ou toujours après (ɟ); nous écrirons les P sous une seule des deux formes; mais nous conservons tous deux les signes f et ɟ.

·1 $u \varepsilon a\,\text{ɟ}\,b \,.\, x,y \varepsilon a \,.\, x=y \,.\supset.\, xu = yu$

[§1 P10·1 $.\supset.\, x\varepsilon\, z\ni(zu = xu) \,.$ Hp $.\supset.\, y\varepsilon\, z\ni(zu=xu) \,.\supset.$ Ths]

·2 $u \varepsilon a\,\text{ɟ}\,b \,.\, c \supset a \,.\supset.\, u \varepsilon c\,\text{ɟ}\,b$ [Hp $.\, x\varepsilon c \,.\supset.\, x\varepsilon a \,.\supset.\, xu \varepsilon b :\supset.$ P]

·3 $u \varepsilon a\,\text{ɟ}\,b \,.\, b \supset c \,.\supset.\, u \varepsilon a\,\text{ɟ}\,c$

[Hp $.\supset:\, x\varepsilon a \,.\supset.\, xu \varepsilon b \,.\supset.\, xu \varepsilon c :\supset.$ Ths]

✻ 2. $a,b,c,d \varepsilon$ Cls $.\supset\therefore$

·0 $u \varepsilon a\,\text{ɟ}\,b \,.\, v \varepsilon b\,\text{ɟ}\,c \,.\, x \varepsilon a \,.\supset.\, x(uv) = (xu)v = xuv$ Df

·01 $u \varepsilon b\,\text{f}\,a \,.\, v \varepsilon c\,\text{f}\,b \,.\, x \varepsilon a \,.\supset.\, (vu)x = v(ux) = vux$ Df

·1 $u \varepsilon a\,\text{ɟ}\,b \,.\, v \varepsilon b\,\text{ɟ}\,c \,.\supset.\, uv \varepsilon a\,\text{ɟ}\,c$

·2 $u \varepsilon a\,\text{ɟ}\,b \,.\, v \varepsilon b\,\text{ɟ}\,c \,.\, w \varepsilon c\,\text{ɟ}\,d \,.\, x \varepsilon u \,.\supset.\, (xu)(vw) = (xuv)w$

L'opération vu, définie par la P·01 est dite « le produit des opérations u et v ». Dans le calcul différentiel on l'appelle « fonction de fonction ». Si u et v sont des mouvements, et en général des pnt f pnt, vu est dit le mouvement composé. L'expression vux est associative.

{ 1·0-·3, 2·0-·2 F1895 p.6 }

§11 | = (inverse)

·1 $a,b \varepsilon$ Cls . $u \varepsilon b$fa .⊃. $(ux)|x = u$ Df |

·2 ———— $u \varepsilon a$fb .⊃. $(|x)(xu) = u$ Df } F1898 {

Le signe | est un signe d'inversion; on peut aussi le lire « par rapport à ». Soit u un signe de fonction f; ux est une expression contenant x. Réciproquement soit A une expression contenant la lettre variable x; par $A|x$, qu'on peut lire « l'expression A considérée comme fonction de x », nous indiquons le signe de fonction u qui, écrit en avant de x, produit la formule donnée A.

Si l'expression A a la forme ux, on déduit la P·1. Mais on écrit le signe x après une expression, dans le but de la réduire à la forme ux.

Ex : $a^n / n! \, |n$ représente le signe de fonction qui pour la valeur n de la variable a la valeur $a^n / n!$. Donc $\Sigma (a^n / n! \, |n, N_0) =$ (somme de la série qu'on obtient de $a^n / n!$ en donnant à n les valeurs 0,1,2... (§e 2·2).

Le signe | désigne la variable dans les opérations Σ, Π, lim, D, S.

P·2. « Soit A une formule contenant la lettre variable x; $(|x)A$ désigne le signe de fonction qui écrit après x produit l'expression donnée A ».

Par le signe | on peut indiquer la substitution; car si A est une formule contenant la lettre variable x, $y|xA$ indique « la valeur que prend la fonction $|xA$, pour la valeur y de la variable », ou « ce que devient la formule A, lorsque l'on remplace x par y ». On peut remplacer un couple, un terne, ... par un autre couple ou terne. Ex.: §+ P11 §× 2·1-·5.

Dans les formules $ux|x$ $|x(xu)$ $(y|x)(xu)$, la lettre x est apparente.

§12 ‘ ’ = (quelque)

Ǝ f ❋ 1. $a,b,c,d \varepsilon$ Cls . $u \varepsilon b$fa .⊃.

·0 $u‘a = y$ꓱ[Ǝ a ⁀ xꓱ$(ux = y)$] Df ‘

·01 $y \varepsilon u‘a$.=. Ǝ xꓱ$(x \varepsilon a \,.\, ux = y)$ [=P·0]

·02 $x \varepsilon a \,.\, y = ux$.⊃. $y \varepsilon u‘a$

On peut lire la formule $u‘a$ par « u des a » ou « u de quelque a »; on doit la considérer comme décomposée en $(u‘)a$. La P·02 dit que la relation $y \varepsilon u‘a$ résulte de l'élimination de x dans le système $x \varepsilon a \,.\, ux = y$.

Ex : §Med 3 §Lm §lim 1·5 §cont 2·1 §D 4·4 §S 3·0 ...

Dans plusieurs cas le signe ‘ est sous-entendu par des conventions exprimées dans la suite: §+ 7·1-·2, §− 2·1, §× 3·0, §/ 2·1 ...

On ne peut pas le sous-entendre dans tous les cas.

P. ex. Num ‘ Cls signifie « les valeurs de l’expression Num u, ou u est une classe quelconque »; il représente l’ensemble du nombre 0, des nombres finis, et des différents nombres infinis. Num Cls signifie « le nombre des classes », qui est l’infini le plus grand.

·1 $x \varepsilon a . \supset . ux \; \varepsilon \; u‘a$ ·11 $u‘a \supset b$

·2 $c \supset a . \supset . u‘c \supset u‘a$ Ex. §Lm 1·4 Dm

[Hp $. \supset .$ $c \frown x \ni (ux = y) \supset a \frown x \ni (ux = y)$. Oper $\exists$. Oper $y \ni$ $. \supset .$ P]

·21 $c \supset a . d \supset a . \supset . u‘(c \frown d) \supset u‘c \frown u‘d$ [P·2⊃P]

·3 $\exists (u‘a) \frown c .=. \exists a \frown x \ni (ux \; \varepsilon c)$ Ex. §Lm P1·1 Dm

[Df ‘ $. \supset :$ $\exists (u‘a) \frown c .=. \exists c \frown y \ni [\exists a \frown x \ni (ux = y)$

§$\exists$ 2·4 $. \supset :$ » $\exists a \frown x \ni [\exists c \frown y \ni (y = ux)]$

Df ι $. \supset :$ » » $(\exists c \frown \iota ux)$

§ι ·7 $. \supset :$ » » $(ux \; \varepsilon c)$]

·31 $u‘a \supset c .=: x \varepsilon a . \supset_x . ux \; \varepsilon c$ [(–c | c)P·3 ⊃ P]

·4 $v \varepsilon cfb . \supset . v‘(u‘a) = (vu)‘a$

$\smile$ ·5 $c \supset a . d \supset a . \supset . u‘(c \smile d) = u‘c \smile u‘d$ { Distrib(‘ ∪) {

[Df ‘ $. \supset .$ $u‘(c \smile d) = y \ni \exists [(c \smile d) \frown x \ni (ux = y)]$

Distrib(⌢,∪) $. \supset .$ » $y \ni \exists [c \; x \ni (ux = y) \smile d \; x \ni (ux = y)]$

Distrib($\exists$,∪) $. \supset .$ » $y \ni [[\exists c \; x \ni (ux = y)] \smile [\exists d \; x \ni (ux = y)]]$

Distrib($\ni$, ∪) $. \supset .$ » $y \ni [\exists c \; x \ni (ux = y)] \smile y \ni [\exists d \; x \ni (ux = y)]$

Df ‘ $. \supset .$ » $u‘c \smile u‘d$]

·6 $x \varepsilon a . \supset . u‘\iota x = \iota \; ux$

{ ·0·2·21·3 F1889 p.XV ; ·1·11·6 PADOA F1899 {

✱ 2.

·0 $a, b \varepsilon$ Cls . $u \varepsilon \; a \mathfrak{f} b . \supset . a’u = y \ni \exists a \frown x \ni (xu = y)$ Df

·1 $k \varepsilon$ Cls $. \supset .$ Cls’$k = y \ni \exists$ Cls $\frown x \ni (xk = y) =$ Cls $\frown y \ni (y \supset k)$ Dfp

On peut lire $a’u$ par « des a le u ».

En conséquence Cls’k signifie « l’ensemble des valeurs de l’expression xk, ou $x \frown k$, où x est une classe » c’est-à-dire, par la §$\exists$ P1·4, « Classe de k » Ainsi Cls’N signifie « classe de nombres ». Ex. §max §Dvr §l’ ...

§13 sim rep idem

$a,b,c \varepsilon$ Cls $. \supset .$

·0 $u \varepsilon (b \mathrm{f} a)$sim $.=:\ u \varepsilon b \mathrm{f} a : x,y \varepsilon a . ux = uy . \supset_{x,y} . x = y$ Df

·1 $u \varepsilon (b \mathrm{f} a)$sim $. c \supset a . \supset . u \varepsilon (b \mathrm{f} c)$sim

·2 » $. b \supset c . \supset . u \varepsilon (c \mathrm{f} a)$sim

·3 » $. x,y \varepsilon a . \supset : x = y .=. ux = uy$

·4 » $. v \varepsilon (c \mathrm{f} b)$sim $. \supset . vu\ \varepsilon (c \mathrm{f} a)$sim

Le signe « sim » signifie « correspondance semblable (similis) ».
Ex.: §+ 9·2·5, §π 3·1.

·5 $u \varepsilon (b \mathrm{f} a)$rep $.=. u \varepsilon (b \mathrm{f} a)$sim $. b \supset u'a$ Df

·6 $u \varepsilon (b \mathrm{f} a)$rep $. v \varepsilon (c \mathrm{f} b)$rep $. \supset . vu\ \varepsilon (c \mathrm{f} a)$rep

·7 $u \varepsilon (b \mathrm{f} a)$sim $. \supset . u \varepsilon (u'a\ \mathrm{f}\ a)$rep

{ ·0-·7 F1895 p.116, F1897 P521 }

Le signe « rep » signifie « correspondance réciproque ».
Ex. §Num P·0 : $a,b \varepsilon$ Cls $. \supset :$ Num$a$ = Num$b$ $.=. \exists (b \mathrm{f} a)$rep
§Σ P1·3 §lim P18·2·3 ...
On suppose écrites les formules correspondantes pour le signe ɟ.

·8 idem$x = x$ Df { F1899 }

idem $\varepsilon\ a \mathrm{f} a$. idem $\varepsilon\ (a \mathrm{f} a)$sim . idem $\varepsilon\ (a \mathrm{f} a)$rep . idem'$a = a$

« idem » représente l'identité : telles sont les opérations arithmétiques +0, —0, ×1, /1, ⌈1, ¹√, ... Dans la théorie des Substitutions l'identité est indiquée simplement par 1. Ex. §Σ P21·4, §cres ·11.

§14 Variab F Funct

·1 $u,v \varepsilon$ Cls $. f \varepsilon\ v \mathrm{f} u . x \varepsilon u . \supset . (f;u)x = fx$ Df

·2 ——— . ——— $. \supset .$ Variab$(f;u) = u$ Df

·3 ——— $. \supset . v \mathrm{F} u = g \ni \{ \exists\ v \mathrm{f} u \frown f \ni [g = (f;u)] \}$ Df

·4 Funct $= g \ni \exists\ (u;v) \ni [u,v \varepsilon$ Cls $. g \varepsilon\ v \mathrm{F} u]$ Df

·5 $f,g \varepsilon$ Funct $. \supset :$

$f = g .=:$ Variab$f$ = Variab$g$ $: x \varepsilon$ Variab$f . \supset_x . fx = gx$ Df

·6 $u,v \varepsilon$ Cls $. \supset . v \mathrm{F} u \supset v \mathrm{f} u$ [P·1 . §f P1·01 $. \supset .$ P]

·7 $u \varepsilon$ Cls $. x \varepsilon v . \supset . [\imath(\iota a \mathrm{F} u)]x = a$ { ·1-·7 F1899 }

Soient u et v des Cls; et $f \varepsilon vfu$. Si l'on donne l'opération f, la classe dans laquelle l'opération est définie n'est pas déterminée; car si l'opération est définie dans la classe u, elle est aussi définie dans toute classe contenue dans u, par la §f P·2, et il y a toujours la possibilité de la définir dans toute classe différente. P. ex. l'opération «mod» dans §mod P·0 est définie sur les nombres relatifs ; en conséquence elle est définie sur les nombres positifs, et dans ce cas coïncide avec l'identité ; ensuite la même opération est définie sur les nombres complexes d'ordre quelconque, sur les substitutions, sur les vecteurs, et on est toujours en droit de l'employer dans des nouveaux cas, présentant quelque analogie, et jamais de contradiction, avec les anciens.

Dans quelques cas il faut considérer en même temps une opération f et une classe u dans laquelle cette opération est définie; c'est à dire le couple $(f;u)$. On rencontre ce couple dans les formules $\Sigma(f,u)$, $\Pi(f,u)$, qui représentent la somme, ou le produit des valeurs de la fonction f, lorsque la variable prend toutes les valeurs dans la classe u, et dans $\mathrm{S}(f,u)$, qui représente l'intégrale de f, étendue au domaine u de variabilité.

P·1. A l'expression $(f,u)x$, où u est une classe, f une opération sur les u, et x un u, nous donnons la signification fx.

P·2. Par variabilité de (f,u) nous entendons la classe u.

P·3. $v\mathrm{F}u$ (v fonction définie des u) indique les couples formés d'une vfu et de la classe u.

P·4. «Funct» indique toutes les expressions de la forme $v\mathrm{F}u$, où u et v sont des classes.

P·5. Deux Fonctions définies sont égales, lorsqu'elles ont la même variabilité, et dans cette variabilité produisent des résultats égaux.

P·6. Toute F est f. Nous parlerons donc des Fonctions sim, rcp, etc.

Ex : $(\mathrm{mod}, \mathrm{Q}) = (\mathrm{idem}, \mathrm{Q})$

« Les fonctions mod et idem, dans la classe Q, coïncident ».

Ex. §Num ·7 §Π 3·2 10, §! 4·0·2 §D 1·2 §qn 1·0 42·0 §Dtrm §Subst.

§15 $^{-1}$ (inversion)

$a,b \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\, u \varepsilon (b\mathrm{F}a)\mathrm{rcp} \,.\supset.$

·0 $u^{-1} = \imath\,(a\mathrm{F}b) \frown v \ni [vu = (\mathrm{idem}, a)]$ Df

·1 $u^{-1}u = (\mathrm{idem}, a)$ ·2 $x \varepsilon a \,.\supset.\, u^{-1}ux = x$ ·3 $(u^{-1})^{-1} = u$

·4 $a,b,c \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\, u \varepsilon (b\mathrm{F}a)\mathrm{rcp} \,.\, v \varepsilon (c\mathrm{F}b)\mathrm{rcp} \,.\supset.\, (vu)^{-1} = u^{-1}\, v^{-1}$

·5 $a \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\, u,v \varepsilon (a\mathrm{F}a)\mathrm{rcp} \,.\, uv = vu \,.\supset.\, u^{-1}\, v = v\, u^{-1}$

·6 » » » » $u^{-1}\, v^{-1} = v^{-1}\, u^{-1}$

Il faut considérer l'exposant —1 comme un signe simple pour indiquer l'inversion. Voir F1897 p.61. Cette théorie n'est pas appliquée dans la suite, où l'on définira directement sin-1 ...

SECONDE PARTIE

ARITHMÉTIQUE

§20 $0\ N_0\ +$

✻ 1. Idées primitives

·1 $0 =$ « zéro »

·2 $N_0 =$ « nombre (entier, positif ou nul) »

·3 $a \varepsilon N_0 . \supset . a+ =$ « le nombre qui vient après a », « le successif de a », « a plus ».

Notes

Peut-on définir le nombre? La réponse dépend de l'ensemble des idées qu'on suppose connues. Si l'on présuppose seulement celles représentées par les signes de Logique Cls, ε, $\supset$, $\frown$, $=$, du §1, alors la réponse est négative. Nous introduisons les idées primitives 0, N_0, $+$, qui combinées avec les signes de logique, nous donnent la définition symbolique de toutes les idées d'Arithmétique, d'Algèbre et d'Analyse infinitésimale.

Le § Num est indépendant de ces idées primitives. Le § vct en contient de nouvelles.

Selon l'école de Pythagore, le premier nombre (Ἀριθμός) est 2. Cette signification se conserva pendant le moyen âge.

L'usage commun est de commencer la numération par 1. Ces nombres ont été indiqués par N dans F1889-1895; maintenant par N_1.

Il est plus commode de commencer par 0. Le signe N_0, qu'on peut lire « nombre », doit être considéré comme un signe unique, qui représente une idée simple, bien qu'il soit typographiquement composé.

Le signe + représente d'abord l'idée simple de « successif ». Après la P3·3 au lieu de $a+$ nous écrirons $a+1$, selon l'usage ordinaire.

Sur l'origine du signe + voir §— *note*.

Sur l'analyse des idées fondamentales de l'Arithmétique voir F1889, RdM. t.1 p.90, F1898.

✻ 2.

$1 = 0+ \;.\; 2 = 1+ \;.\; 3 = 2+ \;.\; 4 = 3+ \;.\; 5 = 4+ \;.$

$6 = 5+ \;.\; 7 = 6+ \;.\; 8 = 7+ \;.\; 9 = 8+ \;.\; X = 9+$ Df

Note sur les chiffres

Ces P définissent les chiffres 0, 1, ... 9. Le signe X des Romains pour indiquer le nombre « dix » est nécessaire jusqu'aux conventions sur la numération (§ΣP10), lesquelles suivent nécessairement la multiplication et l'élévation à une puissance.

Sans ces conventions, les nombres qui suivent 0 sont exprimés par

$$0+, \quad 0++, \quad 0+++, \text{ etc.}$$

Si l'on remplace les + par des barres, et si on sous-entend le 0, ils seront indiqués par

I II III ...

par la répétition d'un même signe ou comme réunion des unités.

C'est la notation primitive des nombres, qui date des temps les plus reculés, et est encore en usage dans des cas spéciaux, comme la taille de la boulangère, les jeux de dès, de dominos, de cartes, la cloche qui sonne les heures.

Dans les hiéroglyphes des anciens Egyptiens, les nombres 1, 2,... 9 sont figurés par 1, 2,... 9 barres. Puis il y a le signe ∩ pour représenter 10, et des signes pour représenter 100, 1000, etc.

Dans les écritures hiératiques et démotiques (a. —2000), déformations de l'écriture hiéroglyphique, les scribes ont réuni ces barres, et ont formé des signes simples, ou chiffres, pour représenter les nombres de 1 à 9; comme on voit encore dans nos chiffres 2 et 3, qui proviennent évidemment de la réunion de deux (=) ou de trois barres (≡). Ces deux chiffres ont, dans le calendrier égyptien, presque la même forme que chez nous et chez les indiens. Chez les arabes ils résultent de barres verticales, et ont à peu près la forme ιο et ω.

Les chiffres 4 et 9 se ressemblent encore chez les différents peuples.

La forme des chiffres 5, 6, 7, 8 a varié beaucoup chez les Egyptiens, les Indiens, les Arabes, et chez nous.

Voir §Σ P10 et F1898.

❋

·1 $a \varepsilon N_0 \,.\supset.\, a+0 = a$) Df+

·2 $a,b \varepsilon N_0 \,.\supset.\, a+(b+) = (a+b)+$)

·3 $a \varepsilon N_0 \,.\supset.\, a+1 = a+$ [(0 | b) P·2 .⊃. P]

·4 $a,b \varepsilon N_0 \,.\supset.\, a+(b+1) = (a+b)+1$ [P·2·3 ⊃ P]

Les P·1·2 définissent la somme par induction.

« Soit a un N_0; $a+0$ signifie a; et, en supposant connue la somme de a avec un nombre b, la somme de a avec le successif de b est, par définition, le nombre successif de $a+b$ ».

Si dans la P·2 on donne à b successivement les valeurs 0, 1, 2, ..., on a

$$a+1 = a+ \qquad a+2 = a++ \qquad a+3 = a+++ \qquad \ldots$$

En général $a+b$, qu'il faut imaginer décomposé en a et $+b$, signifie « a suivi de b signes + » ou « le successif d'ordre b de a ».

✻ 4. Propositions primitives

·0 $N_0 \varepsilon$ Cls Pp ·1 $0 \varepsilon N_0$ Pp

·2 $a\varepsilon N_0 .\supset. a+ \varepsilon N_0$ Pp

·3 $s\varepsilon \text{Cls} . 0\varepsilon s : x\varepsilon s .\supset_x. x+ \varepsilon s :\supset. N_0 \supset s$ Pp

{ P·3 = Induct = « loi d'induction » }

{ Pascal a.1654 t.3 p.298 :

« Premier lemme ... cette proposition se rencontre dans la seconde base... Deuxième ... si cette proposition se trouve dans une base quelconque, elle se trouvera nécessairement dans la suivante.

D'où il se voit qu'elle est nécessairement dans toutes les bases. » }

Les idées primitives sont déterminées par les propositions primitives que nous venons d'énoncer et par les P6·2 P8·4, desquelles découlent toutes les P de l'Arithmétique.

Dans la lecture des propositions il convient de se rapprocher autant que possible du langage ordinaire. On lira les P4 p. ex. comme il suit :

·0 « N_0 est une classe » ·1 « à laquelle appartient 0 »

·2 « Tout nombre est suivi par un nombre. »

·3 « Soit s une classe ; supposons que 0 appartienne à cette classe ; et que toutes les fois qu'un individu appartient à cette classe, son suivant y appartienne aussi ; alors tous les nombres appartiennent à cette classe. » On appelle " principe d'induction ,, cette Pp . On peut aussi la lire : « Si une proposition est vraie pour le nombre 0, et si, étant vraie pour le nombre x, elle est aussi vraie pour le nombre $x+$, elle est vraie en général ». Ou encore : « N_0 est le plus petit système qui satisfasse aux conditions ·0·1·2. »

La P·0, non nécessaire selon les conventions de F1889, le devient par les conventions actuelles. Voir §1 P1·7 note.

Une condition a contenant une variable x, ou un système de variables, est dite « indépendante » de la condition b, si $\exists\, x\ni(b-a)$, « existent des x qui satisfont à la condition b et non à la a ».

Les Pp sont des conditions entre les objets non définis 0, N_0 +, qu'on peut considérer comme des variables ; on peut donc parler de leur indépendance.

Si l'on remplace N_0 par R_0 (nombre rationnel positif ou nul), la condition ·3 n'est pas vérifiée, bien que les précédentes le soient. En effet il ne suffit pas de reconnaître qu'une formule est vraie pour 0, et que étant vraie pour a, elle le soit aussi pour $a+1$, pour conclure qu'elle est vraie pour toutes les valeurs rationnelles de la variable. Autrement dit :

$$R_0 \varepsilon \text{Cls} : 0\varepsilon R_0 : a\varepsilon R_0 .\supset. a+1 \varepsilon R_0$$

mais la proposition :

$$s\varepsilon \text{Cls} . 0\varepsilon s : x\varepsilon s .\supset_x . x+1 \varepsilon s :\supset. R_0 \supset s$$

n'est pas vraie, car on a une absurdité si l'on remplace s par N_0 .

Donc la P·3 est indépendante des précédentes.

✻ 5.

·1 $a,b \varepsilon N_0 \,.\supset.\, a+b \,\varepsilon\, N_0$

[Hp . $b=0$. Df+ .⊃. Ths (1)

Hp . $a+b \,\varepsilon N_0$. Df+ . Pp·2 .⊃. $a+(b+1) \,\varepsilon N_0$ (2)

(1) . (2) . Induct .⊃. P]

« La somme de deux nombres est un nombre déterminé.

En effet, quel que soit le nombre a, cela est vrai si $b=0$ par la P3·1 ; si la somme $a+b$ est définie pour une valeur de b, par la P3·2 elle sera aussi définie si l'on remplace b par son successif ; donc, d'après le principe d'induction, la somme est définie en général. »

·2 $a,b,c \varepsilon N_0 \,.\supset.\, a+b+c = (a+b)+c$ Df

·3 $a,b,c \varepsilon N_0 \,.\supset.\, a+(b+c) = a+b+c$ { Assoc+ }

[Hp . $c=0$.⊃. Ths (1)

Hp . $(a+b)+c = a+(b+c)$. Df+ .⊃. $(a+b)+(c+1) = [(a+b)+c]+1$
$= [a+(b+c)]+1 = a+[(b+c)+1] = a+[b+(c+1)]$ (2)

(1) . (2) . Induct .⊃. P]

·4 $a \varepsilon N_0 \,.\supset.\, 0+a = a$

[Df+ .⊃. $0+0=0$ (1)

$a \varepsilon N_0$. $0+a=a$. Df+ .⊃. $0+(a+1) = (0+a)+1 = a+1$ (2)

(1) . (2) . Induct .⊃. P]

·41 $a \varepsilon N_0 \,.\supset.\, 1+a = a+1$

[Df+ . P·4 .⊃. $1+0 = 0+1 = 1$ (1)

$a \varepsilon N_0$. $1+a = a+1$.⊃. $1+(a+1) = (1+a)+1 = (a+1)+1$ (2)

(1) . (2) . Induct .⊃. P]

·5 $a,b \varepsilon N_0 \,.\supset.\, a+b = b+a$ { Comm+ }

[Hp . $b=0$. P·4 .⊃. Ths (1)

$a,b \varepsilon N_0$. $a+b=b+a$.⊃. $a+(b+1) = (a+b)+1$ (2)

» . P·41 .⊃. $(b+a)+1 = 1+(b+a)$

Associat+ .⊃. » $= (1+b)+a$

P·41 .⊃. » $= (b+1)+a$ (3)

(1) . (2) . (3) . Induct .⊃. P]

·6 $a,b,c \varepsilon N_0 \,.\supset.\, a+b+c = a+c+b$ [Assoc+ . Comm+ .⊃. P]

✻ 6.

·1 $a,b \varepsilon N_0 \,.\, a=b \,.\supset.\, a+1 = b+1$

[Hp . §1 P10·1 .⊃. $a+1 = a+1$ (1)

» . (1) .⊃. $a \varepsilon x \ni (a+1 = x+1)$ (2)

» . (2) . §1 P10·5 .⊃. $b \varepsilon x \ni (a+1 = x+1)$ (3)

» . (3) .⊃. Ths]

·2 $a,b \varepsilon N_0 . a+1 = b+1 . \supset . a=b$ Pp

« Deux nombres suivis par le même nombre sont égaux. »

Un système périodique, précédé d'une antipériode; comme la suite 0, 1, 1, 1, ... satisfait à toutes les P précédentes, mais non à la nouvelle Pp.

·3 $a,b \varepsilon N_0 . \supset : a=b . = . a+1 = b+1$ [P·1 . P·2 . ⊃. P]

·4 $a,b,c \varepsilon N_0 . \supset : a+c = b+c . = . a=b$ Ex. §— P1·1 Dm

[Hp . $c=0$. ⊃. Ths (1)

Hp : $a=b . = . a+c=b+c$: P·3 :⊃: $a=b . = . a+(c+1)=b+(c+1)$ (2)

(1) . (2) . Induct . ⊃. P]

Ǝ ‘ ✻ 7. $u,v,w \varepsilon$ Cls'N_0 . $a \varepsilon N_0$. ⊃.

·1 $u+a = x \ni [\exists u \frown y \ni (x = y+a)] = u'(+a)$ Df

·2 $a+u =$ » » $(x = a+y)] = (a+)'u$ Df

·3 $u+v = x \ni [\exists (y;z) \ni (y \varepsilon u . z \varepsilon v . x = y+z)]$ Df

·31 $u+v = (x+y) | (x;y) '(u;v)$ Dfp

·4 $a+u = u+a = \iota a+u$

·5 $u+v = v+u$ ·6 $u+(v+w) = (u+v)+w = u+v+w$

·7 $N_0+N_0 = N_0$

Nous définissons ici la somme d'un nombre et d'une classe de nombres, et de deux classes. Ex: P8, §— P1, §⋀ P5, ...

∪ - ✻ 8.

·1 $N_1 = N_0+1$ { = « nombre positif » } Df

·2 $N_1 \supset N_0$ [= P4·2]

·3 $N_0 = \iota 0 \cup N_1$

[$0 \varepsilon \iota 0 \cup N_1$: $x \varepsilon N_0 . \supset . x+1 \varepsilon N_1$: Induct :⊃: $N_0 \supset \iota 0 \cup N_1$ (1)

P4·1 . P8·2 . ⊃. $\iota 0 \cup N_1 \supset N_0$ (2) (1) . (2) . ⊃. P]

·4 $a \varepsilon N_0 . \supset . a+1 -= 0$ Pp

·5 $0 -\varepsilon N_1$ [= P·4]

·6 $N_1 = N_0 - \iota 0$ Dfp [P·3 . P·5 . §⋀ 5·2 . ⊃. P]

·7 $0 = \imath(N_0 - N_1)$ Dfp

·4. « Le nombre qui suit un nombre quelconque n'est jamais 0. »

Un système périodique, p. ex. les heures astronomiques du jour, où l'heure qui suit 23 est 0, ne satisfait pas à la ·4, bien qu'il satisfasse à toutes les autres Pp.

Ainsi nous avons prouvé l'indépendance ordonnée des Pp; c'est-à-dire que non seulement on ne sait pas déduire, mais qu'il est impossible de déduire une Pp des précédentes.

On peut prouver aussi l'indépendance absolue des Pp. Les exemples portés à propos des P4·3, 6·2, 8·4 prouvent qu'elles sont indépendantes aussi des Pp suivantes. Ils ont été publiés dans RdM. a.1891 p.91.

Si en attribuant à 0 et à + la signification commune, l'on donne à N_0 la signification N_1, sont vérifiées toutes les Pp, exceptée la 4·1.

Si en conservant à 0 et à + la signification commune, on attribue à N_0 la signification « chiffre, ou ensemble des nombres 0, 1, 2,.... 9 », on satisfaira à toutes les conditions, à l'exception de la 4·2.

Ces exemples sont dûs à M. Padoa; voir F1899.

Enfin nions que N_0 soit une Cls; c'est-à-dire par Cls entendons tout ensemble, excepté l'ensemble N_0; mais convenens que $a \varepsilon N_0$ signifie « a est un nombre » (comme si N_0 était une Cls). Alors seront vérifiées toutes les P suivantes, mais non la ·0. Cet exemple a été indiqué par M. Vacca.

Ces Pp, dont nous avons vu la nécessité, sont suffisantes pour déduire toutes les propriétés des nombres qu'on rencontrera dans la suite. Mais il y a une infinité de systèmes qui satisfont à toutes ces Pp. P. ex. elles sont toutes vérifiées si l'on remplace N_0 et 0 par N_1 et 1. Tous les systèmes qui satisfont aux Pp sont en correspondance réciproque avec les nombres. Le nombre, N_0, est ce qu'on obtient par abstraction de tous ces systèmes; autrement dit, le nombre, N_0, est le système qui a toutes les propriétés énoncées par les P primitives, et celles-là seulement.

·7. Cette P, due à Padoa F1899, exprime 0 par N_0 et $N_1 = N_0+$; elle permet de réduire le nombre des idées primitives. Mais alors il faut changer le système des Pp; cette transformatinn a été faite par M. Padoa dans ses conférences sur l'*Algebra e la Geometria, quali teorie deduttive*, Roma 1900.

On pourrait même définir le système $(0, N_0, +)$ comme le système satisfaisant aux Pp.

ɟ ✻ 9·1 $+ \varepsilon N_0 \text{ɟ} N_0$ [= P4·2]

·2 $+ \varepsilon (N_0 \text{ɟ} N_0)\text{sim}$ [= P6·3]

·3 $s \varepsilon \text{Cls} . 0 \varepsilon s . + \varepsilon s \text{ɟ} s .\supset. N_0 \supset s$ [= P4·3]

·4 $b \varepsilon N_0 .\supset. +b \varepsilon N_0 \text{ɟ} N_0$ [= ·1]

·5 » $+b \varepsilon (N_0 \text{ɟ} N_0)\text{sim}$ [= P6·4]

✻ 10. $s \varepsilon$ Cls . $u \varepsilon$ sƒs . $a \varepsilon s$. $b,c \varepsilon N_0$.⊃.

·1 $au0 = a$ Df ·2 $au(b+) = (aub)u$ Df

·3 $aub\ \varepsilon s$

[Hp . $b=0$. P·1 .⊃. Ths : Hp . $aub\ \varepsilon s$. P·2 .⊃. $au(b+)\ \varepsilon s$: Induct :⊃. P]

·4 $(ub)\ \varepsilon$ sƒs [= P·3]

·5 $u \varepsilon$ (sƒs)Sim .⊃. $(ub)\ \varepsilon$ (sƒs)Sim

[Hp . $b=0$.⊃. Ths (1)

Hp . $ub\ \varepsilon$ (sƒs)Sim . $x,y \varepsilon s$. $x -= y$.⊃. $xub -= yub$.

⊃. $(xub)u -= (yub)u$.⊃. $xu(b+) -= yu(b+)$ (2)

Hp . $ub\ \varepsilon$ (sƒs)Sim . (2) .⊃. $u(b+)\ \varepsilon$ (sƒs)Sim (3)

(1).(3). Induct .⊃. P]

·6 $v \varepsilon$ sƒs : $x \varepsilon s$.⊃$_x$. $xuv = xvu$:⊃. $(aub)v = (av)ub$

[Hp . $b=0$. P·1 .⊃. Ths (1)

Hp . $(aub)v = (av)ub$. P·2 .⊃. $[au(b+)]v = [(aub)u]v =$

$[(av)ub]u = (av)u(b+)$ (2)

(1) . (2) . Induct .⊃. P]

·61 Hp P·6 .⊃. $(aub)vc = (avc)ub$ [Hp . $(ub,v,c)|(v,u,b)$ P·6 .⊃. Ths]

·62 Hp P·6 .⊃. $a[(uv)b] = a(ub)(vb)$

[Hp . $b=0$.⊃. Ths (1)

Hp . $a[(uv)b] = a(ub)(vb)$.⊃. $a[(uv)(b+)] = a[(uv)b]uv =$

$a(ub)(vb)uv = a(ub)u(vb)v = a[u(b+)][v(b+)]$ (2)

(1) . (2) . Induct .⊃. P]

·7 $a(ub)(uc) = a(uc)(ub)$ [P·61 . $v=u$.⊃. P]

·8 $(aub)uc = au(b+c)$

[Hp . $c=0$. P·1 .⊃. Ths (1)

Hp . $(aub)uc = au(b+c)$.⊃. $[(aub)uc]u = [au(b+c)]u$ (2)

» .⊃. $(aub)u(c+) = au(b+c+)$ (3)

Hp . (1) . (3) . Induct .⊃. Ths]

Ex. des P précédentes : P11, §× P2, §↑ P1·0.

·9 $v \varepsilon$ sfs .⊃. $v^b a = a[(|x\ v x)b]$ Df

« P·1 » Soit s une classe, u une transformation des s en s ; soit a un s, et b un nombre; alors par $au0$ on indique a »; (P·2) «et par $au(b+)$ nous entendons ce qu'on obtient en opérant sur aub encore une fois par le signe u ».

Si l'on fait, dans la P·2, $b=0$, on obtient $au1=au$; en faisant $b=1$ on a $au2 = (au)u$, $au3 = auuu$,... est ainsi de suite. En conséquence, par induction, on obtient la signification de aub, quel que soit le nombre b (P·3).

La formule aub doit être décomposée, lorsqu'il est nécessaire, en $a(ub)$. Soit donc u une opération définie dans la classe s; quel que soit le nombre b on obtient la nouvelle opération ub (P·4), qu'on appelle « l'opération u répétée (itérée) b fois ».

On déduit : (P·5) « Toute fonction semblable répétée est aussi semblable ».

(P·6) « Si l'opération u est commutable avec l'opération v, l'opération ub est aussi commutable avec v, et (P·61) l'opération ub est commutable avec vc, quels que soient les nombres b et c ».

(P·62) « Si les opérations u et v sont commutables entre elles dans la classe s, alors l'opération uv répétée b fois est, dans la classe s, identique à l'opération $(ub)(vb)$ ».

Quelques Auteurs appellent « puissance » d'une opération l'opération répétée. (P·7) « Deux puissances d'une même opération sont commutables entre elles ».

(P·9) Si un signe de fonction v, au lieu de suivre la variable, la précède, la fonction répétée b fois est indiquée ordinairement par v^b, notation que nous suivrons. Dans ce cas $(|x)(vx)$ est le signe de fonction qui, en suivant la variable a, donne pour résultat va.

Ex.: §q P84·1·2 §D P6·4 §e P3·1 §Subst P2·5.

On rencontre les puissances des fonctions dans Babbage, LondonT. a.1815 p.390.

* 11. $(N_0, +)|(s, u)$ P10·1 ·2 ·3 ·4 ·5 ·7 ·8 .Ↄ.
P3·1 ·2 5·1 9·4 ·5 5·6 ·3

Des P10 par une substitution on déduit les P sur la somme.

On peut continuer la lecture en passant au §> qui suit, ou au §—, ou au §×, ou au §··· Σ, car chacun de ces signes est défini par le signe +.

§21 $\geqq$ $>$

\+ ✱ 1. $a,b,c,d \varepsilon \mathrm{N}_0 \,.\supset:$

·0 $b \geqq a \,.=.\, a \leqq b \,.=.\, b \varepsilon\, a+\mathrm{N}_0$ Df$\geqq$

Les signes $>$ et $<$ ont la forme ff et § dans Girard, a.1629 fol.*B*; la forme |‾ _‾ dans Oughtred a.1631, qui a aussi introduit des signes correspondants à $\geqq$ $\leqq$ (Clavis Math. Londini a.1648 p.166) ; et la forme actuelle dans Harriot a.1631 p.10.

Nous considérons ici le signe $\geqq$ comme un signe simple. Voir P2·4.

·01 $a \geqq 0$ ·02 $a \geqq a$ ·03 $a \geqq b \,.\, b \geqq a \,.=.\, a = b$

·04 $a \geqq b \geqq c \,.=.\, a \geqq b \,.\, b \geqq c$ Df

·1 $c \geqq b \,.\, b \geqq a \,.\supset.\, c \geqq a$

[$x,y \varepsilon \mathrm{N}_0 \,.\, c = b+y \,.\, b = a+x \,.\supset.\, c = a+x+y = a+(x+y) \,.\supset.\, c \geqq a$ (1)
(1) . Elim$(x;y)$ $.\supset.$ P]

·2 $b \geqq a \,.=.\, b+c \geqq a+c$

[$x \varepsilon \mathrm{N}_0 \,.\, b = a+x \,.\supset.\, b+c = a+x+c = a+c+x \,.\supset.\, b+c \geqq a+c$ (1)
$x \varepsilon \mathrm{N}_0 \,.\, b+c = a+c+x$. §+ P6·4 $.\supset.\, b = a+x \,.\supset.\, b \geqq a$ (2)
(1).(2) . Elim x $.\supset.$ P]

·3 $b \geqq a \,.\, d \geqq c \,.\supset.\, b+d \geqq a+c$

[Hp . P·2 $.\supset.\, b+d \geqq a+d \,.\, a+d \geqq a+c$. P·1 $.\supset.$ Ths]

✱ 2. $a,b,c,d \varepsilon \mathrm{N}_0 \,.\supset:$

·0 $b > a \,.=.\, a < b \,.=.\, b \varepsilon\, a+\mathrm{N}_1$ Df$>$

·1-·3 $= (> \mid \geqq)$P1·1-·3

·4 $b \geq a \,.=.\, b > a \,.\cup.\, b = a$ Dfp

[Df$\leqq$. §+ P8·3 . Df$<$ $.\supset:$ $b \geqq a \,.=.\, b \varepsilon\, a+\mathrm{N}_0 \,.=.\, b \varepsilon\, a+(\iota 0 \cup \mathrm{N}_1) \,.=.$
$b \varepsilon\, \iota a \cup (a+\mathrm{N}_1) \,.=.\, b \varepsilon \iota a \,.\cup.\, b \varepsilon\, a+\mathrm{N}_1 \,.=.\, b = a \,.\cup.\, b > a$]

·5 $a = b \,.\cup.\, a < b \,.\cup.\, a > b$

[$a \varepsilon \mathrm{N}_0 \,.\, b = 0$. P1·01 $.\supset.$ P (1)
$a,b \varepsilon \mathrm{N}_0 \,.\, a = b \,.\supset.\, a < b+1$ (2)
» $.\, a < b \,.\supset.$ (3)
» $.\, c \varepsilon \mathrm{N}_1 \,.\, a = b+c \,.\supset.\, a \geqq b+1$ (4)
» $.\, a > b$. (4) $.\supset.\, a \geqq b+1$ (5)
» $.\, a = b \cup a < b \cup a > b$. (2)(3)(5) $.\supset.$
$(a < b+1) \cup (a = b+1) \cup (a > b+1)$ (6)
(1) . (6) . Induct $.\supset.$ P]

·6 $-(a > a)$ ·7 $b > a \,.=.\, -(b \leqq a)$ Dfp

Les Df de max et min contiennent les seuls signes précédents.

§22 —

$+$ ✻ 1. $a \varepsilon N_0 . b \varepsilon a+N_0 . \supset :$

·0 $b-a = \iota[N_0 \frown x \ni (x+a = b)]$ Df

·1 $b-a \, \varepsilon N_0$ ·2 $(b-a)+a = b$

[Hp $. \supset . \exists \, N_0 \frown x \ni (b = x+a)$ (1)

Hp $. x,y \varepsilon N_0 . b = x+a . b = y+a .$ §+ P6·4 $. \supset . x=y$ (2)

(1) . (2). §ιP·1 $. \supset . b-a \, \varepsilon \, N_0 \frown x \ni (x+a = b) . \supset .$ Ths]

·3 $-a \; \varepsilon \; (a+N_0) \text{f} N_0$ [= P·1]

·4 $a-0 = a$ ·41 $a-a = 0$

✻ 2·1 $s \varepsilon$ Cls' $N_0 . \supset . +s = +`s . -s = -`s$ Df

·2 $a,b \varepsilon N_0 . \supset . a+(+b) = a+b$ Df

·3 $b \varepsilon N_0 . a \varepsilon b+N_0 . \supset . a+(-b) = a-b$ Df

·4 $a \varepsilon N_0 . \supset . a = +a$. Df

Note sur les nombres positifs et négatifs.

Les hiéroglyphes adoptés par Ahmès, a.—2000 pour représenter les signes + et — sont les jambes d'un homme qui va, ou qui vient (table XI N.28).

Le signe + dans Diophante est sous-entendu. Le signe — a la forme *ʌ*.

Ces signes ont la forme *p̃* et *m̃*, abréviations des mots « plus » et « minus » dans Chuquet a.1484 et dans Paciuoli a. 1494; et la forme actuelle, qu'on croit une déformation de la précédente, chez Grammateus a.1521 ; voir M. Cantor t.2 p.39.

(Dans Widmann a.1489 le signe + a une signification différente).

P1·0 « Soit a un nombre, et b un nombre supérieur ou égal à a. On indique par $b-a$ le nombre x qui satisfait à l'équation $x+a = b$ ».

$N_0 \frown x \ni (x+a=b)$ est une classe; en écrivant en avant de cette classe le signe ι on obtient l'individu qui la constitue.

P·1. « Dans les Hp. énoncées, $b-a$ est un nombre déterminé ».

P·3. « Soit a un nombre ; alors $-a$ est une opération qui, appliquée à un nombre non inférieur à a produit un nombre ».

Elle n'est qu'une forme différente de la P·1. On peut la comparer à la §+ P9·4, laquelle dit que $+a$, c'est à dire l' opération + répétée a fois, est un $N_0 \text{f} N_0$.

Les signes $+a$ $-a$ $+N_0$ $-N_0$
correspondent, à peu près, aux mots
« ajouter a » « retrancher a » « nombre positif » « nombre négatif »; ils représentent des opérations f .

Cette façon de considérer les nombres positifs et les négatifs se rencontre plus ou moins clairement dans plusieurs A.:

MacLaurin a.1748 p.6:

« a Quantity that is to be added is called a Positive Quantity; and a Quantity to be subtracted is said to be Negative. »

Cauchy, a.1821, p.333:

« ... on acquiert l'idée de quantité (positive ou négative) lorsque l'on considère chaque grandeur d'une espèce donnée comme devant servir à l'accroissement ou à la diminution d'une autre grandeur fixe de même espèce. Pour indiquer cette destination, on représente les grandeurs qui doivent servir d'accroissements par des nombres précédés du signe +, et les grandeurs qui doivent servir de diminutions par des nombres précédés du signe —..... Enfin, l'on est convenu de ranger les nombres absolus qui ne sont précédés d'aucun signe dans la classe des quantités positives. »

La Df P2·1 donne aux signes $+N_0$ et $-N_0$ les valeurs « plus quelque N_0 » et « moins quelque N_0 ».

Une lettre isolée peut indiquer un nombre positif ou un nombre négatif.

Si l'on pose $a=2$, $b=+5$, on aura, sans convention nouvelle, $ab = 2+5$; la P2·2 dit que nous convenons, selon l'usage commun, de représenter par $a+b$ cette somme. De même pour la P·3.

La P2·4 exprime la convention de représenter par le même signe deux objets différents, un nombre absolu et un nombre positif. On pourrait évidemment supprimer ces définitions ·2-·4; mais on aura des formules différentes des ordinaires.

n

$N_0 + -$ ✻ 3·0 $n = +N_0 \cup -N_0$ Df

·1 $N_0 \supset n$ [P·0. P2·4 .⊃. P]

« n », qu'on lit « nombre relatif, ou qualifié », indique l'ensemble des nombres positifs et des négatifs.

·2 $x,y \varepsilon n . \supset \therefore$

$x=y .=: u \varepsilon N_0 . u+x, u+y \varepsilon N_0 . \supset_u . u+x = u+y$ Df

« Deux nombres relatifs x et y sont égaux, par définition, lorsque pour tout nombre positif u, on a $u+x = u+y$, pourvu que ces opérations soient possibles en nombres positifs ».

·3 $a,b \varepsilon N_0 . \supset : +a = +b .=. -a = -b .=. a=b$:

$+a = -b .=. a=0 . b=0$

✻ 4·0 $x,y \varepsilon n . \supset .$

$x+y = \iota\, n \frown z \ni [u \varepsilon N_0 . u+x, u+x+y\, \varepsilon N_0 . \supset_u . u+x+y = u+z]$ Df

« On appelle somme $x+y$ de deux n, un nombre relatif z tel que, en effectuant sur un nombre positif u l'opération $+x$, puis l'opération $+y$, pourvu qu'elles soient possibles, on obtienne pour dernier résultat $u+z$. »

·01 $a,b \varepsilon \mathrm{N}_0 \,.\supset.$
$+a+b = +(a+b) \,.\, -a-b = -(a+b) \,.\, +a-b = +(a-b) =$
$-(b-a) \,.\, -a+b = -(a-b) = +(b-a)$

{ Brahmagupta, Version de Rodet, *Journal Asiatique*, a.1878 p.24:

« § 19. La somme de deux biens est un bien; celle de deux dettes une dette; d'un bien et d'une dette, leur différence, ou, si elles sont égales, zéro. La somme de zéro et d'une dette est une dette; d'un bien et de zéro est un bien; de deux zéros est zéro.

§ 20-21. Règle pour la soustraction....

Dette retranchée de zéro devient un bien, et bien devient une dette. ...

Si l'on doit retrancher un bien d'une dette ou une dette d'un bien, on en fait la somme. »}

$a,b,c \varepsilon \mathrm{n} \,.\supset.$ ·1 $a+b \;\varepsilon\, \mathrm{n}$
·2 $a+b = b+a$ ·3 $a+(b+c) = (a+b)+c = a+b+c$
·4 $a+c = b+c \,.=.\, a=b$ ·5 $a+0 = a$

❊ 5·0 $x \varepsilon \mathrm{n} \,.\supset.\, -x = \iota\, \mathrm{n} \frown y \ni (x+y=0)$ Df
·01 $a \varepsilon \mathrm{N}_0 \,.\supset.\, -(+a) = -a \,.\, -(-a) = +a$
$a,b \varepsilon \mathrm{n} \,.\supset.$ ·1 $-a \;\varepsilon\, \mathrm{n}$ ·2 $-(-a) = a$ ·3 $-(a+b) = -a-b$
·4 $a-b = a+(-b)$ Df
·5 $a=b \,.=.\, -a=-b \,.=.\, a-b = 0$
·6 $x \varepsilon \mathrm{n} \,.\, a+x = b \,.=.\, x = b-a$
·7 $a+b = 0 \,.\, a-b = 0 \,.=.\, a=0 \,.\, b=0$

❊ 6·0 $u,v,w \;\varepsilon$ Cls'n $.\, a \varepsilon \mathrm{n} \,.\supset.$ §+ P7 . §− P2·1
·1 $a+\mathrm{n} = \mathrm{n} \,.\, \mathrm{n}+\mathrm{n} = \mathrm{n} \,.\, -\mathrm{n} = \mathrm{n}$
·2 $\mathrm{n} = \mathrm{N}_0-\mathrm{N}_0 = \mathrm{N}_1-\mathrm{N}_1 = \mathrm{n}-\mathrm{n}$

$>$ ❊ 7·0 $x,y \varepsilon \mathrm{n} \,.\supset:\, x>y \,.=.\, y<x \,.=.\, x \;\varepsilon\; y+\mathrm{N}_1$ Df
·01 $a,b \varepsilon \mathrm{N}_1 \,.\supset:\, +a > +b \,.=.\, a>b : +a > -b : -a > -b \,.=.\, a<b$
$a,b,c,d \varepsilon \mathrm{n} \,.\supset.$ ·1-·6 = §> P2·1-·7
·7 $a>b \,.=:\, x \varepsilon \mathrm{N}_0 \,.\, x+a, x+b \;\varepsilon\, \mathrm{N}_0 \,.\supset_x.\, x+a > x+b$ Dfp
·8 $a>b \,.=.\, -a < -b \,.=.\, a-b>0$
·9 $a>b \,.\, c<d \,.\supset.\, a-c > b-d \,:\, a<b \,.\, c>d \,.\supset.\, a-c < b-d$

Les Df de « mod » et de « sign » sont exprimées par les seuls signes précédents.

§23 ×

+ ✻ 1. $a,b,c,d \varepsilon N_0 . \supset .$ ·0 $a \times 0 = 0$
·01 $a \times (b+1) = (a \times b) + a$ Df×

·02 $ab = a \times b$. $a \times b \times c = (a \times b) \times c$.
$a \times b + c = (a \times b) + c$. $a + b \times c = a + (b \times c)$ Df

On rencontre le signe × dans Oughtred, *Clavis mathematica*, a.1631.
Les P·0·01 sont des Df par induction. On peut les remplacer par P2·0, ou par §Σ P3·4.

·1 $a \times b \ \varepsilon\ N_0$
[$a \varepsilon N_0$. Df× $. \supset .$ $a \times 0 \ \varepsilon\ N_0$ (1)
$a,b \varepsilon N_0$. $a \times b \ \varepsilon\ N_0$. Df× . §+ P5·1 $. \supset .$ $a \times (b+1) \ \varepsilon\ N_0$ (2)
(1) . (2) . Induct $. \supset .$ P]

·2 $0 \times a = 0$
[Df× $. \supset .$ $0 \times 0 = 0$ (1)
$a \varepsilon N_0$ ∴ $0 \times a = 0$. Df× $. \supset .$ $0 \times (a+1) = 0 \times a + 0 = 0$ (2)
(1) . (2) . Induct $. \supset .$ P]

·21 $1 \times a = a$
[Df× $. \supset .$ $1 \times 0 = 0$ (1)
$a \varepsilon N_0$. $1 \times a = a$ $. \supset .$ $1 \times (a+1) = 1 \times a + 1 = a + 1$ (2)
(1) . (2) . Induct $. \supset .$ P]

·3 $a(b+c) = ab + ac$ } Distrib(×,+) {
[$a,b,c \varepsilon N_0$. $c = 0$ $. \supset .$ $a(b+c) = ab + ac$ (1)
$a,b,c \varepsilon N_0$. $a(b+1) = ab + ac$. Assoc+ . Df× $. \supset .$ $a[b+(c+1)] =$
$a[(b+c)+1] = a(b+c) + a = ab + ac + a = ab + a(c+1)$ (2)
(1) . (2) . Induct $. \supset .$ P]

·31 $(a+b)c = ac + bc$ } Euclides VII P5 {
[Hp . $c = 0$ $. \supset .$ Ths (1)
$a,b,c \varepsilon N_0$. $(a+b)c = ac + bc$. Df× $. \supset .$ $(a+b)(c+1) = (a+b)c + (a+b) =$
$ac + bc + a + b = (ac + a) + (bc + b) = a(c+1) + b(c+1)$ (2)
(1) . (2) . Induct $. \supset .$ P]

·32 $(a+b)(c+d) = ab + ad + bc + bd$ [P·3 . P·31 $. \supset .$ P]

·4 $ab = ba$ } Comm× {

} Euclides VII P16 : *Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ Α, Β,*
καὶ ὁ μὲν Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω,
ὁ δὲ Β τὸν Α » Δ » ·
λέγω, ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ Γ τῷ Δ. {

[$a \varepsilon N_0$. P·0·2 .⊃. $a \times 0 = 0 \times a$ (1)
$a,b \varepsilon N_0$. $ab = ba$. Df× .⊃. $a(b+1) = ab+a = ba+a$
P·21 . P·31 .⊃. » $= ba+1a = (b+1)a$ (2)
(1) . (2) . Induct .⊃. P]

·3 $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ { Assoc× }

[Hp . $c=0$.⊃. Ths (1)
$a,b,c \varepsilon N_0$. $(ab)c = a(bc)$. Df× . Distrib(×,+) .⊃.
$(ab)(c+1) = (ab)c+ab = a(bc)+ab = a(bc+b) = a[b(c+1)]$ (2)
(1) . (2) . Induct .⊃. P]

·6 $ab=0$.=. $a=0$.∪. $b=0$ ·7 $ac=bc$. $c -= 0$.⊃. $a=b$

ɟ + ✻ 2·0 $a,b \varepsilon N_0$.⊃. $a \times b = 0[(+a)b]$ Dfp [= P1·0·01]

« $a \times b$ est ce qu'on obtient en effectuant sur 0 l'opération $+a$, b fois ».

·1 $(N_0, +a, 0)|(s, u, a)$§+ P10·3 .⊃. P1·1

·2 $(N_0, +a, 0)|(s, u, a)$ §+ P10·8 .⊃. P1·3

·3 $(N_0, +a, +b, 0, c)|(s, u, v, a, b)$§+ P10·62 .⊃. P1·31

·4 $s \varepsilon$ Cls . $u \varepsilon$ sɟs . $x \varepsilon s$.⊃. $x[(ua)b] = x[u(a \times b)]$

[Hp . $b=0$.⊃. Ths (1)
Hp . $x[(ua)b] = x[u(a \times b)]$.⊃. $x[(ua)(b+1)] = x[(ua)b]ua =$
$[u(a \times b)]ua = xu(a \times b+a) = xu[a \times (b+1)]$ (2)
(1) . (2) . Induct .⊃. P]

·5 $(N_0, +a, 0)|(s,u,x)$ P·4 .⊃. P1·5

✻ 3. $u,v,w \varepsilon$ Cls'N_0 . $a,b \varepsilon N_0$.⊃:

·0 $u \times a = u'(\times a)$. $(a \times v) = (a \times)'v$. $u \times v = (\times|+)$§+ P7·3 Df

·01 $au = ua = (\iota a)u$. $uv = vu$. $u(vw) = (uv)w = uvw$

·02 $u(a+b) ⊃ ua+ub$. $a(u+v) = au+av$. $u(v+w) ⊃ uv+uw$

·03 $N_0 \times N_0 = N_0$. $N_1 \times N_1 = N_1$

$a,b,c \varepsilon N_0$.⊃: ·1 $b \varepsilon N_0 \times a$. $c \varepsilon N_0 \times b$.⊃. $c \varepsilon N_0 \times a$

·11 $b \varepsilon N_0 \times a$.⊃. $N_0 \times b ⊃ N_0 \times a$

·2 $b,c \varepsilon N_0 \times a$.⊃. $b+c \varepsilon N_0 \times a$ ·21 $N_0 \times a + N_0 \times a = N_0 \times a$

·3 $b, b+c \varepsilon N_0 \times a$.⊃. $c \varepsilon N_0 \times a$ { ·2-·3 Euclides vii P28 }

·31 $b \varepsilon N_0 \times a$.⊃. $bc \varepsilon N_0 \times ac$

·32 $m,n \varepsilon N_0 \times c$.⊃. $am+bn \varepsilon N_0 \times c$

·4 $a+b \varepsilon 2N_0$.=. $a,b \varepsilon 2N_0$.∪. $a,b \varepsilon 2N_0+1$

·5 $a(a+1) \varepsilon 2N_0$. $a(a+1)(a+2) \varepsilon 6N_0$ Continuation : §! P·2

·6 $a(a+1)(2a+1) \varepsilon 6N_0$

$>$ ✱ 4. $a,b,c,d \varepsilon N_1 . \supset .$
·1 $a>b .=. ac > bc$ ·2 $a>b . c>d . \supset . ac > bd$
·3 $a>b . c>d . \supset . ac+bd > ad+bc$

$-$ ✱ 5.
·1 $b,c \varepsilon N_0 . a \varepsilon b+N_0 . \supset . (a-b)c = ac-bc$ { EUCLIDES VII P7 }
[Df$-$. Distrib$(\times,+)$ $. \supset . ac = [(a-b)+b]c = (a-b)c+bc . \supset .$ P]
·2 $b,d \varepsilon N_0 . a \varepsilon b+N_0 . c \varepsilon d+N_0 . \supset . (a-b)(c-d) = ac+bd-bc-ad$

n ✱ 6.
·0 $a \varepsilon n . b \varepsilon N_0 . \supset . a \times b = 0[(+a)b] . a \times (-b) = 0[(-a)b]$ Df
·01 $a,b \varepsilon N_0 . \supset . (+a)\times(+b) = +(a\times b) . (-a)\times(+b) = -(a\times b) .$
$(+a)\times(-b) = -(a\times b) . (-a)\times(-b) = +(a\times b)$
{ DIOPHANTUS I 9: « *Λεῖψις ἐπὶ λεῖψιν πολλαπλασιασθεῖσα ποιεῖ ὕπαρξιν. Λεῖψις δὲ ἐπὶ ὕπαρξιν, ποιεῖ λεῖψιν.* » }

✱ 7. $a,b,c \varepsilon n . \supset .$ ·1 $a\times b \varepsilon n$
·2 $0\times a = 0 . 1\times a = a$ ·3 $a(b+c) = ab+ac$ ·4 $ab = ba$
·5 $a(bc) = (ab)c = abc$ ·6-·7 = P1·6-·7

✱ 8. $a,b,c,d \varepsilon n . \supset .$
·1 $a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)=0$
·2 $(a-b)(c-d)+(b-c)(a-d)+(c-a)(b-d) =0$
·3 $(a+b)(b+c)(c-a)+(b+c)(c+a)(a-b)+(c+a)(a+b)(b-c) = (a-b)(b-c)(c-a)$
·4 $(a-b)(b+c-a)(a-b+c)+(b-c)(a-b+c)(a+b-c)+(c-a)(a+b-c)(b+c-a) = 4(a-b)(b-c)(c-a)$
·5 $a(b+c)(b+c-a)+b(c+a)(c+a-b)+c(a+b)(a+b-c) = 6abc$
·6 $a(b-c)(b+c-a)+b(c-a)(c+a-b)+c(a-b)(a+b-c) = 2(a-b)(b-c)(c-a)$

✱ 9·0-·6 = (n | N_0) P3

✱ 10. $a,b \varepsilon n . c \varepsilon N_1 . \supset : a>b .=. ac > bc$

Par les signes précédents sont exprimées les Df de /, ⊦, Np.

§24 / R r

× ✻ 1. $a \varepsilon N_1 . b \varepsilon N_1 \times a . \supset$:

·0 $b/a = \iota N_1 \frown x \ni (x \times a = b)$ Df

·1 $b/a \varepsilon N_1$ ·2 $(b/a) \times a = b$

·3 $/a \varepsilon (a \times N_1) \mathfrak{f} N_1$

·4 $a/1 = a$ ·41 $a/a = 1$

✻ 2·1 $s \varepsilon \mathrm{Cls}'N_1 . \supset . /s = /`s$ Df

2 $a,b \varepsilon N_1 . \supset . b/a = (\times b)(/a)$ Df

P1·0. « Soit a un nombre (non nul), et b un multiple de a. « b divisé par a » désigne le nombre x qui satisfait à la condition $x \times a = b$ ».

P·3. « Donc $/a$, qu' on lit « diviser par a », indique une opération définie sur les multiples de a; le résultat est un N_1 ».

On dérive toutes ces propositions de §— P1, si l'on remplace les signes N_0,+,—,0 par N_1,×,/,1.

La notation b/a, répandue notamment chez les auteurs anglais, est une transformation très commode de la notation commune $\frac{b}{a}$, due aux Hindous, et qu'on rencontre dans Leonardo Fibonacci, a. 1202, *Liber Abaci*, fol. 11. Le signe de division a aussi les formes :
$a)b$ dans Oughtred a.1667 p.196, où « quantitas intra curvam denominator est », $b \div a$ (Pell, MacLaurin, ...), $b:a$ (Leibniz), etc.

P2·2. « On écrit b/a au lieu de $(\times b)(/a)$, c' est-à-dire multiplier par b et ensuite diviser par a; a et b sont des nombres donnés ».

Toute expression de la forme $(\times b)(/a)$, où a et b sont des N_1, s' appelle « raison » ou « nombre rationnel » ou « fraction ». Nous l' indiquerons par le symbole R.

Le nombre rationnel, ou raison, λόγος ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν ἔχει d'Euclide, se présente ici comme une opération, possible dans quelques cas, précisément comme nous avons rencontré les nombres positifs et négatifs.

Selon le langage ordinaire, $\frac{b}{a}$ précède le nombre, ou la grandeur, sur laquelle on opère, et signifie « diviser par a et multiplier par b ». P. ex. « $\frac{3}{5}$ de 15 fr. » signifie « ce qu'on obtient en divisant 15 fr. par 5 et en multipliant le résultat par 3 ». Mais nous préférons donner à b/a, qui suit le nombre sur lequel on opère, la signification « multiplier par b et diviser par a », afin de rendre possible l'opération dans un plus grand nombre de cas.

R = (nombre rationnel)

$N_1 \times /$ ❋ 3·0 $R = x \ni \exists (a;b) \ni [a,b \varepsilon N_1 \,.\, x = (\times b)(/a)]$ Df

·01 $R = N_1/N_1$ Dfp [= P·0]

·1 $N_1 \supset R$

·2 $x,y \varepsilon R \,.\supset\therefore\, x = y \,.=:\, u \varepsilon N_1 \,.\, ux, uy \,\varepsilon N_1 \,.\supset_u.\, ux = uy$ Df

« Deux nombres rationnels x et y sont dits égaux, lorsque, quel que soit le nombre u, tel que les opérations ux et uy soient possibles, les résultats sont égaux ». Cfr. §n P3·2. Quelques A. prennent comme Df la P4·1. Ils ne définissent pas la raison de deux N_1, mais seulement l'égalité de deux raisons. On introduit alors les nombres rationnels par abstraction.

❋ 4. $a,b,c,d,e,f \,\varepsilon N_1 \,.\supset:$

·1 $a/b = c/d \,.=.\, ad = bc$ Dfp { Euclides vii P19 }

[Hp . $a/b = c/d \,.\supset.\, bd\,,\, (bd)(a/b)\,,\, (bd)(c/d) \,\varepsilon N_1$. P3·2 $.\supset.$

$(bd)(a/b) = (bd)(c/d) \,.\supset.\, ad = bc$ (1)

Hp . $ad = bc \,.\, x \varepsilon N_1 \,.\, x(a/b)\,,\, x(c/d) \,\varepsilon\, N_1 \,.\supset.\, xad = xbc \,.\supset.$

$(xa/b)bd = (xc/d)bd$. §×P1·51 $.\supset.\, xa/b = xc/d$ (2)

Hp . $ad = bc$. (2) . Export $.\supset.\, a/b = c/d$ (3)

(1) . (3) $.\supset.$ P]

·2 $a/b = (ac)/(bc)$ { Euclides vii P17 }

·3 $a/b = c/b \,.=.\, a = c$ ·4 $a/b = a/d \,.=.\, b = d$

·5 $a/b = c/d \,.=.\, a/c = b/d \,.=.\, b/a = d/c$ { Eucl. vii P13 }

·6 $a/b = d/e \,.\, b/c = e/f \,.\supset.\, a/c = d/f$ { Euclides v P22 }

·7 $a/b = e/f \,.\, b/c = d/e \,.\supset.\, a/c = d/f$ { Euclides v P23 }

L'égalité $a/b = c/d$ est dite une " proportion ". La ·5 exprime les règles dites " invertir " et " alterner ".

❋ 5·0 $x,y \varepsilon R \,.\supset.$

$x \times y = xy = \iota\, R \frown z \ni (u \varepsilon N_1 \,.\, ux, uxy \,\varepsilon N_1 \,.\supset_u.\, uxy = uz)$. Df

Le produit xy de deux nombres rationnels est le nombre rationnel z qui satisfait à la condition $uxy = uz$, quel que soit le nombre entier u, pourvu que les opérations ux et uxy soient possibles ».

$a,b,c,d \varepsilon N_1 \,.\supset.$

·1 $(a/b)(b/c) = a/c$

·2 $(a/b) \times (c/d) = (ac)/(bd)$ { Euclides viii P5 }

✻ 6. $a,b,c \varepsilon R .\supset:$

·1 $a \times b \, \varepsilon R$ ·2 $ab = ba$ ·3 $a(bc) = (ab)c = abc$

·4 $ac = bc .=. a = b$ ·5 $(R \mid N_0)\S \times$ P2·0

·6 $a \times R = R$ ·7 $R \times R = R$

·8 $\exists N_1 \frown m \ni (ma, mb, mc \, \varepsilon N_1)$

✻ 7·0 $x \varepsilon R .\supset. /x = \iota R \frown y \ni (x \times y = 1)$ Df

$a,b \varepsilon N_1 .\supset.$ ·1 $/(a/b) = b/a$ ·2 $(a/b)/(c/d) = (ad)/(bc)$

La P7·0 définit $/x$, qui signifie « diviser par x », ou « multiplier par le réciproque de x », ou, en supprimant le signe de multiplication, « le réciproque de x ». Ce symbole est le correspondant de $-x$, qui signifie « retrancher x » « ajouter l'opposé de x » « le nombre négatif $-x$ ».

Les calculs sur les fractions étaient connus des anciens Egyptiens, a. -2000. Voir F1899.

La considération de la fonction $/a$, « le réciproque de a », c'est-à-dire la suppression du numérateur de la fraction, lorsqu'il est l'unité, qu'on remarque dans Ahmès, a été nouvellement proposée par M. Macfarlane (Educat. Times, a.1887).

✻ 8. $a,b \varepsilon R .\supset:$

·1 $/a \, \varepsilon R$ ·2 $/(/a) = a$ ·3 $/(ab) = (/a)(/b)$

·4 $b/a = b \times (/a)$ Df

P8·4. On peut considérer le rapport b/a comme le produit de b par le réciproque de a. Ainsi toute division est réduite à une multiplication. Ces formules ont leurs correspondantes dans §n.

·5 $a = b .=. /a = /b .=. a/b = 1$

·6 $x \varepsilon R . ax = b .=. x = b/a$ { Ahmès N.24-38 }

·7 $/R = R$

+ ✻ 11. $a,b,c,d,e,f \varepsilon N_1 .\supset.$

·1 $a/b = c/d .=. (a+b)/b = (c+d)/d$ { Euclides v P18 }

·2 $a/b = c/d = e/f .\supset. a/b = (a+c+e)/(b+d+f)$ { » P12 }

·3 $a/b = c/d . e/b = f/d .\supset. (a+e)/b = (c+f)/d$ { » P24 }

·4 $(a+c)/(b+d) = a/b .\supset. c/d = a/b$ { Euclides v P19 }

Les règles exprimées par ces P sont dites " componendo " et " dividendo ".

✻ 12·0 $x,y \varepsilon R .\supset.$

$x+y = \iota R \frown z \ni (u \varepsilon N_1 . ux, uy \, \varepsilon N_1 .\supset_u . ux+uy = uz)$ Df

P12·0 « La somme de deux R, $x+y$, est le nombre rationnel z, qui satisfait à la condition $ux+uy = uz$, pour toute valeur du nombre entier u, sur lequel on puisse effectuer les opérations ux et uy en nombres entiers. »

$a,b,c,d \varepsilon \mathrm{N}_1 .\supset.$
·1 $a/c+b/c=(a+b)/c$ ·2 $a/b+c/d=(ad+bc)/(bd)$

✻ 13. $a,b,c\varepsilon \mathrm{R} .\supset:$ ·1 $a+b \,\varepsilon\, \mathrm{R}$ ·2 $a+b=b+a$
·3 $a+(b+c)=(a+b)+c=a+b+c$ ·4 $a+c=b+c .=. a=b$
·5 $(\mathrm{R} \mid \mathrm{N}_0)$§$+$ P7 ·6 $\mathrm{R}+\mathrm{R}=\mathrm{R}$ ·7 $a(b+c)=ab+ac$

✻ 14. $a,b,c \,\varepsilon\, \mathrm{R} .\supset:$
·1 $x,y\varepsilon \mathrm{R} . x/a=y/b . x+y=c .=. x=ac/(a+b) . y=bc/(a+b)$
} Ahmès N.63 {

La règle pour décomposer un nombre c en parties proportionelles aux nombres a et b est dite " règle de proportion " ou " de société ".

$>$ ✻ 15. $a,b\varepsilon \mathrm{R} .\supset:$ ·0 $b>a .=. a<b .=. b\varepsilon\, a+\mathrm{R}$ Df
·01 $b>a .=. u\varepsilon \mathrm{N}_1 . ua, ub \,\varepsilon\, \mathrm{N}_1 .\supset_u . ub>ua$ Dfp
§$>$ P2·1-·7 §$\times$ P4·1-·3

✻ 16. $a,b,c,d\varepsilon\, \mathrm{N}_1 .\supset:$
·1 $a/b>c/b .=. a>c : a/b>a/d .=. b<d$ } Eucl. v P10 {
·2 $a/b>c/d .=. ad>bc$
·3 $a/b=c/d . a>b . a>c .\supset. a+d>b+c$ } Eucl. v P25 {
·4 $a/(a+b)<(a+c)/(a+b+c)$
·5 $a/b<c/d .\supset. a/b<(a+c)/(b+d)<c/d$ } Chuquet p.653:
« La rigle des nombres moyens. Numerateur auec numerateur se adioustent et denoĩateur auec denoĩateur. » {
} Pappus vii P8 p.691 {

✻ 17. $a,b,c,d\varepsilon \mathrm{R} .\supset.$
·1 $b>a .=. /b</a .=. b/a>1$
·2 $a>b . c<d .\supset. a/c>b/d : a<b . c>d .\supset. a/c<b/d$
·3 $a<b .=. \exists\, \mathrm{R}\frown x\ni(a<x<b)$
·4 $a<b . m,n\varepsilon \mathrm{R} .\supset. a<(ma+nb)/(m+n)<b$
·5 $a\varepsilon\, \mathrm{R}-\iota 1 .\supset. a+/a>2$

$-$ ✻ 21. $a,b\varepsilon \mathrm{N}_1 . c\varepsilon\, a+\mathrm{N}_1 . d\varepsilon\, b+\mathrm{N}_1 .\supset.$
·1 $c/a=d/b .=. (c-a)/a=(d-b)/b$ } Euclides vii P11 {
·2 $c/a=d/b .=. (c+a)/(c-a)=(d+b)/(d-b)$

✻ 22·0 $x\varepsilon \mathrm{R} . y\varepsilon\, x+\mathrm{R} .\supset. y-x=\imath\, \mathrm{R}\frown z\ni(x+z=y)$ Df
·1 $b,c\varepsilon \mathrm{N}_1 . a\varepsilon\, b+\mathrm{N}_1 .\supset. a/c-b/c=(a-b)/c$
·2 $a,b,c,d,ad-bc\, \varepsilon \mathrm{N}_1 .\supset. a/b-c/d=(ad-bc)/(bd)$

❋ 23. $a \varepsilon \mathrm{R} . b \varepsilon a+\mathrm{R} .\supset.$ ·1 $b-a \varepsilon \mathrm{R}$ ·2 $(b-a)+a=b$

❋ 24. $(\mathrm{R} \mid \mathrm{N}_0)$ §— P2

❋ 25. $a \varepsilon \mathrm{N}_1 . b \varepsilon \mathrm{n} \times a .\supset.$ ·0 $b/a = \iota\, \mathrm{n} \cap x \ni (xa=b)$ Df

·1-·5 = $(\mathrm{n} \mid \mathrm{N}_1)$P1·1-·5 ·6 $0/a=0$

r = (nombre rationnel relatif)

❋ 31·0 $\mathrm{r} = \mathrm{n}/\mathrm{N}_1$ Df ·1 $\mathrm{r} = +\mathrm{R} \cup -\mathrm{R} \cup \iota 0$ Dfp

·2 $\mathrm{R}_0 = \mathrm{R} \cup \iota 0$ Df {Ex.: §mod P2·10

·3 $\mathrm{R} \supset \mathrm{R}_0 \supset \mathrm{r}$ ·4 $\mathrm{n} \supset \mathrm{r}$

❋ 32. $x,y \varepsilon \mathrm{r} .\supset\therefore$

·1 $x=y .=: u \varepsilon \mathrm{R} . u+x, u+y \varepsilon \mathrm{R} .\supset_u. u+x = u+y$ Df

·2 $x+y = \iota\, \mathrm{r} \cap z \ni (u \varepsilon \mathrm{R} . u+x, u+x+y \varepsilon \mathrm{R} .\supset_u. u+x+y = u+z)$ Df

·3 $-x = \iota\, \mathrm{r} \cap y \ni (x+y=0)$ Df

·4 $x-y = x+(-y)$ Df

·5 $x=y .=: u \varepsilon \mathrm{n} . ux, uy \varepsilon \mathrm{n} .\supset_u. ux = uy$ Dfp

·6 $x \times y = xy = \iota\, \mathrm{r} \cap z \ni (u \varepsilon \mathrm{n} . ux, uxy \varepsilon \mathrm{n} .\supset_u. uxy = uz)$ Df

·7 $/x = \iota\, \mathrm{r} \cap y \ni (xy=1)$ Df

·8 $x/y = x \times (/y)$ Df

·9 $x+y = \iota\, \mathrm{r} \cap z \ni (u \varepsilon \mathrm{n} . ux, uy \varepsilon \mathrm{n} .\supset_u. ux+uy = uz)$ Dfp

❋ 33. $a,b,c \varepsilon \mathrm{r} .\supset.$ ·1 $a+b \varepsilon \mathrm{r}$ ·2-·5 = §n P4·2-·5

❋ 34. ——— $.\supset.$ ·1 $-a \varepsilon \mathrm{r}$ ·2-·7 = §n P5·2-·7

❋ 35. $(\mathrm{r} \mid \mathrm{n})$§n P6·0-·1

❋ 36. ——— $.\supset.$ ·1 $a \times b \varepsilon \mathrm{r}$ ·2-·7 = §× P7·2-·7 P8

❋ 37. $a,b \varepsilon \mathrm{r} - \iota 0 .\supset.$ ·1 $/a \varepsilon \mathrm{r}$ ·2-·6 = P8·2-·6

·7 $/-a = -/a$

❋ 40. $a,b,c,d,a',b',c' \varepsilon \mathrm{r} .\supset\therefore$

·1 $a-c -\!= 0 .\supset: x \varepsilon \mathrm{r} . ax+b = cx+d .=. x = (d-b)/(a-c)$

{ Aryabhata P31 :

« Par la différence entre des objets $[a-c]$ divisez la différence des roupies $[d-b]$, que possèdent deux personnes: le quotient $[(d-b)/(a-c)]$ est la valeur d'un objet $[=x]$, si les fortunes sont égales $[ax+b=cx+d]$ ».}

·2 $x,y \varepsilon \mathrm{r} . x+y=a . x-y=b .=. x=(a+b)/2 . y=(a-b)/2$

{ Diophantus I 1 }

·3 $ab'-a'b \;-\!\!=0 .\supset: x,y\varepsilon \mathrm{r} . ax+by=c . a'x+b'y=c' .=.$
$x=(cb'-c'b)/(ab'-a'b) . y=(ac'-a'c)/(ab'-a'b)$
Continuation : §Subst 5·6

·4 $\exists (x;y)\ni[x,y\varepsilon \mathrm{r} . -(x=0 . y=0) . ax+by=0 . a'x+b'y=0]$
$.=. ab'-a'b=0$

·5 $x,y,z\varepsilon \mathrm{r} . y+z=a . z+x=b . x+y=c .=. x=(b+c-a)/2 .$
$y=(a+c-b)/2 . z=(a+b-c)/2$ { DIOPHANTUS I 16 }

·6 $x,y,z\varepsilon \mathrm{r} . y+z-x=a . z+x-y=b . x+y-z=c .=.$
$x=(b+c)/2 . y= \ldots$ { DIOPHANTUS I 18 }

·7 $x,y,z,t\varepsilon \mathrm{r} . y+z+t=a . x+z+t=b . x+y+t=c . x+y+$
$z=d .=. x=(b+c+d-2a)/3 . y= \ldots$ { DIOPHANTUS I 17 }

·8 $x,y,z,t\varepsilon \mathrm{r} . y+z+t-x=a . x+z+t-y=b . x+y+t-z=c .$
$x+y+z-t=d .=. x=(a+b+c+d)/4-a/2 . y= \ldots$
{ DIOPHANTUS I 19 }

✻ 41·0 $a,b,c\varepsilon \mathrm{r}-\iota 0 . a-\!\!=b . b-\!\!=c . c-\!\!=a . a+b+c=0 .\supset.$
$[(a-b)/c+(b-c)/a+(c-a)/b][c/(a-b)+a/(b-c)+b/(c-a)]=9$
{ PRIOR a.1878; Cfr. Mm. a.1881 t.10 p.33 }

✻ 42. $a,b\varepsilon \mathrm{r} .\supset:$ ·0 $b>a .=. b\varepsilon a+\mathrm{R}$
·01-·9 $= (\mathrm{R},\mathrm{r}) \mid (\mathrm{N}_1,\mathrm{n})$ §n P7 ·91 $b>a .=. \exists (a+\mathrm{R})\frown(b-\mathrm{R})$

Les Df de E, β, ϑ, l', l, sont composées par les seuls signes qui précèdent.

§25 $\upharpoonleft$ = (puissance)

$N_0 + \times$ ❋ 1. $a,b,m,n \varepsilon N_0 . \supset .$

·0 $a \upharpoonleft m = a^m = 1[(\times a)m]$ { = " a élevé à la puissance m "} Df

Note. Euclide indique les puissances par une périphrase.

Dans Chuquet, a.1484 et ses contemporains, la base est sous-entendue; elle est l'inconnue du problème.

Girard a.1629 adopte la notation $(m)a$.

La notation a^m a été introduite dans l'usage commun par Descartes, a.1644; nous la suivrons ici lorsque l'exposant est simple.

La notation $a \upharpoonleft m$ se rencontre dans Pell a.1659 (cfr. Wallis t.2 p.239); mais nous avons donné la forme $\upharpoonleft$, qui est le signe de racine renversé, au signe de Pell, qui est la sigle grecque de la terminaison ος.

La notation $a \upharpoonleft m$ est plus commode lorsque l'exposant est composé; en écrivant l'exposant en caractères plus petits on rencontre des difficultés de lecture remarquées dans IdM. a.1900 p.271, et des difficultés typographiques encore plus graves. Par ces raisons plusieurs A. écrivent exp x au lieu de e^x.

·1 $a \upharpoonleft 0 = 1$ ·2 $a \upharpoonleft (m+1) = (a \upharpoonleft m) \times a$ Dfp
[$(N_0, \times a, 1)|(s,u,a)$§+P10·1·2 $. \supset .$ P·1·2]

·21 $a \upharpoonleft 1 = a^1 = a \,.\, a \upharpoonleft 2 = a^2 = a \times a$

·22 $1 \upharpoonleft m = 1^m = 1$ ·23 $0 \upharpoonleft (m+1) = 0$

·3 $a \upharpoonleft m \,\varepsilon\, N_0$ [$(N_0, \times a, 1)|(s,u,a)$§+ P10·3 $. \supset .$ P]

·4 $(a \upharpoonleft m) \times (a \upharpoonleft n) = a \upharpoonleft (m+n)$ [————————·8 ——]
{ DIOPHANTUS *Arith.* I }

·5 $(a \times b) \upharpoonleft m = (a \upharpoonleft m) \times (b \upharpoonleft m)$ { Distrib($\upharpoonleft$,$\times$) }
[$N_0, \times a, \times b, 1)|(s,u,v,a)$§+ P10·62 $. \supset .$ P]

·6 $(a \upharpoonleft m) \upharpoonleft n = a \upharpoonleft (m \times n)$ [$(N_0, \times a, m, n, 1)|(s,u,a,b,x)$§$\times$ P2·4 $. \supset .$ P]
{ EUCLIDES IX P3-4, 8, 9, 11 }

❋ 2. $a,b \varepsilon N_0 . \supset .$

·1 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ { EUCLIDES II P4 }

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ { DIOPHANTUS IV P9 }

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$

$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^5 + b^7$

$(a+b)^8 = a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6$
$+ 8ab^7 + b^8$ Continuation : §C P7·1

| Tschu Schi Kih a.1303 ; Stifel, *Arithmetica integra*, a.1544, liber 1 c. 5 ; Tartaglia a.1556 p.73 :

« Se una quantità sarà divisa in due parti, come si voglia, il cubo censo censo di tutta la quantità [$(a+b)^{12}$] sempre sarà eguale a questi 13 principali producti, cioè al produtto del cubo censo censo della prima parte [a^{12}]. Et al produtto 12uplo del terzo relato della detta prima parte via la seconda parte [$12a^{11}b$]. Et al produtto del 66uplo del censo relato della detta prima parte via il censo della seconda [$66a^{10}b^2$]....., et finalmente al produtto del cen. cen. cen. della seconda parte [b^{12}]..., et con tal modo potrai procedere in infinito. » |

·11 $(a+b)^3 = a^3+b^3+3ab(a+b)$

·12 $(a+b)^4+a^4+b^4 = 2(a^2+ab+b^2)^2$

·13 $a^2(a+b)^2+a^2b^2+(a+b)^2b^2 = (a^2+ab+b^2)^2$

·14 $(a+b)^5 = a^5+b^5+5ab(a+b)(a^2+ab+b^2)$

·15 $(a+b)^7 = a^7+b^7+7ab(a+b)(a^2+ab+b^2)^2$

| ·14·15 Cauchy a.1839 Œuvres s.1 t.4 p.501 |

·16 $(a+b)^8+a^8+b^8=2(a^2+ab+b^2)[(a^2+ab+b^2)^3+4a^2b^2(a+b)^2]$

·17 $(a+b)^{10}+a^{10}+b^{10}=(a^2+ab+b^2)^2[2(a^2+ab+b^2)^3+15a^2b^2(a+b)^2]$

✻ 3. $a,b,c \varepsilon N_0$.Ɔ.

·1 $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

·2 $(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3(a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2)+6abc$

·3 » $= a^3+b^3+c^3+3(a+b)(a+c)(b+c)$

·4 » $+3abc = a^3+b^3+c^3+3(a+b+c)(ab+ac+bc)$

·5 » $+a^3+b^3+c^3 = (b+c)^3+(c+a)^3+(a+b)^3+6abc$

·6 $(a+b+c)^4 = a^4+b^4+c^4+4(a^3b+a^3c+b^3a+b^3c+c^3a+c^3b)+6(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)+12(a^2bc+b^2ac+c^2ab)$

·7 » $+(a^4+b^4+c^4) = 2(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)^2+8abc(a+b+c)+2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)$

·8 $(a+b+c)^4+a^4+b^4+c^4=(a+b)^4+(a+c)^4+(b+c)^4+12abc(a+b+c)$

·9 $(a+b+c)^5 = a^5+b^5+c^5+5(a+b)(a+c)(b+c)(a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc)$

Continuation : §! P8.

✻ 4. $a,b,m,n \varepsilon N_1$.Ɔ:

·01 $a^2 \varepsilon N_1 b^2$.=. $a \varepsilon N_1 b$ ·02 $a^3 \varepsilon N_1 b^3$.=. $a \varepsilon N_1 b$

| Euclides viii P14-17 :

Ἐὰν τετράγωνος τετράγωνον μετρῇ, καὶ ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήσει

καὶ ἐὰν ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρῇ, καὶ ὁ τετράγωνος τὸν τετράγωνον μετρήσει.

Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς κύβον ἀριθμὸν μετρῇ, ——————————————————————————, *καὶ ὁ κύβος τὸν κύβον* ———. }

·1 $a \varepsilon N_1 \times b$.=. $a^m \varepsilon N_1 \times b^m$ } Euclides viii P6 }

·2 $a^2+b^2 \varepsilon 3N_1$.⊃. $a,b \varepsilon 3N_1$: $a^2+b^2 \varepsilon 7N_1$.⊃. $a,b \varepsilon 7N_1$

Continuation : §Np 3·22

·3 $(10a+5)^2 = a(a+1)\times 100+25$

$(100a+24)^{2m} \varepsilon 100N_1+76$ $(100a+24)^{2m+1} \varepsilon 100N_1+24$

$(100a+76)^m \varepsilon 100N_0+76$ $(100a+26)^{m+1} \varepsilon 100N_1+76$

$2^{n+2}+3^{2n-1} \varepsilon 7N_1$ $2^{6n+1}+3^{2n+2} \varepsilon 11N_1$ $2^{6n+3}+3^{4n+2} \varepsilon 17N_1$

$2^{3n+1}+3\times 5^{2n-1} \varepsilon 17N_1$ $2^{n+1}+2^{n+4}+5^{2n+1} \varepsilon 23N_1$

$2^{8n+2}+7^{4n+4} \varepsilon 65N_1$ $3^{12n+6}+1 \varepsilon 730N_1$

✻ 5. $u,v \varepsilon$ Cls'N_0 . $a,b \varepsilon N_0$.⊃.

·0 u⌐$b = u'$(⌐b) . a⌐v = (a⌐)'v . u⌐v = (⌐|+)§+ P7·3 Df

·01 a⌐$(u+v) = (a$⌐$u)\times(a$⌐$v)$. $(u\times v)^a = u^a \times v^a$

·1 N_0^2 ⊃ $3N_0 \cup (3N_0+1)$ N_0^2 ⊃ $4N_0 \cup (4N_0+1)$

N_0^2 ⊃ $5N_0 \cup (5N_0+1) \cup (5N_0+4)$ N_0^2 ⊃ $8N_0 \cup 8N_0+1 \cup 8N_0+4$

N_0^2 ⊃ $10N_0 \cup (10N_0+1) \cup (10N_0+4) \cup (10N_0+6) \cup (10N_0+9)$

N_0^3 ⊃ $4N_0 \cup (4N_0+1) \cup (4N_0+3)$

N_0^3 ⊃ $7N_0 \cup (7N_0+1) \cup (7N_0+6)$ N_0^3 ⊃ $9N_0 \cup (9N_0+1) \cup (9N_0+8)$

N_0^4 ⊃ $5N_0 \cup (5N_0+1)$ Continuation : §Chf §Np 3·9

$a \varepsilon N_0$.⊃. $(10N_0+a)^5$ ⊃ $10N_0+a$

·2 $a \varepsilon N_1$.⊃: $a^2 \varepsilon N_1^3$.⊃. $a \varepsilon N_1^3$ } Euclides ix P6 :

Ἐὰν ἀριθμὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας κύβον ποιῇ, καὶ αὐτὸς κύβος ἔσται.}

$a+1, a^2+1 \varepsilon 2N_1^2$.=. $a=1$.∪. $a=7$ } Fermat t.2 p.434}

$a^2+2 \varepsilon N_1^3$.=. $a=5$ $a^2+4 \varepsilon N_1^3$.=. $a=2$.∪. $a=11$

} Fermat a.1657 t.2 p.345 :

« ... il n'y a qu'un seul nombre quarré en entiers qui, joint au binaire, fasse un cube, et le dit carré est 25... »

« ... si on cherche un quarré qui, ajouté à 4 fasse un cube, on n'en trouvera jamais que deux en nombres entiers, savoir 4 et 121. »}

$a^2+a \varepsilon 2N_1^4$.⊃. $a=1$ } Fermat t.1 p.341 }

$a(a+1)(a+2)(a+3)+1 \varepsilon N_1^2$ [$= (a^2+3a+1)^2$]

$a(a+1)$, $a(a+1)(a+2)$ $-\varepsilon$ $N_1^2 \cup N_1^3$

·3 $2\times(N_0^2+N_0^2) \supset N_0^2+N_0^2$. $(N_1^2+N_1^2)\times(N_1^2+N_1^2) \supset N_0^2+N_1^2$

$(2N_0+1)-(8N_0+7) \supset N_0^2+N_0^2+N_1^2$ { LEGENDRE a.1797 p.398 {

$2N_0+1 \supset N_0^2+N_0^2+2N_0^2$ » »

$n\varepsilon N_1 .\supset. (N_0^2+N_0^2+N_0^2)^n \supset N_0^2+N_0^2+N_0^2$

·4 $N_1 \supset N_1^2+N_0^2+N_0^2+N_0^2$ { BACHET a.1621 p.241:
« Omnem autem numerum vel quadratum esse vel ex duobus aut tribus aut etiam quatuor quadratis componi, satis experiendo deprehendis. » {

{Dem. Cfr. FERMAT t.1 p.305; LAGRANGE a.1770 t.3 p.189 {

·41 $(N_1+1)^2 \supset N_1^2+N_1^2+N_0^2+N_0^2$

{ P. TANNERY IdM. a.1898 t.5 p.281 {

·42 $(8N_0+7)\times N_1^2 \supset N_1^2+N_1^2+N_1^2+N_1^2$ { FERMAT a.1636 t.2 p.66:
« Octuplum cuiuslibet numeri unitate deminutum componitur ex quatuor quadratis tantum, non solum in integris sed etiam in fractis ».{

·5 $a,b,c\varepsilon N_1 . a^2=b^2+c^2 .\supset. b\varepsilon 3N_1 \cup c\varepsilon 3N_1 . b\varepsilon 4N_1 \cup c\varepsilon 4N_1 .$
$a\varepsilon 5N_1 \cup b\varepsilon 5N_1 \cup c\varepsilon 5N_1 . abc\,\varepsilon\, 60N_1$
{ FRÉNICLE a.1676 p.76-79 {

·6

$2\upharpoonright(2\upharpoonright 5)+1 \;\varepsilon\; N_1\times[2^7(2^2+1)+1]$ {EULER PetrC. a.1732 t.6 p.104{

$2\upharpoonright(2\upharpoonright 6)+1 \;\varepsilon\; N_1\times[2^8(2^{10}+2^5+2^4-1)+1]$ { LANDRY {

$2\upharpoonright(2\upharpoonright 12)+1 \;\varepsilon\; N_1\times[2^{14}(2^3-1)+1]$ { PERVOUCHINE PetrB. a.1878 {

$2\upharpoonright(2\upharpoonright 23)+1 \;\varepsilon\; N_1\times[2^{25}(2^2+1)+1]$ { » » {

$2\upharpoonright(2\upharpoonright 36)+1 \;\varepsilon\; N_1\times[2^{39}(2^2+1)+1]$ { SEELHOFF Zm. a.1886 t.31 p.173{

Continuation: §Np 3·4

·7 $a,b\varepsilon N_1 . m\varepsilon 2N_1+1 .\supset. a^m+b^m \;\varepsilon\; N_1\times(a+b)$

✻ 6.

·0 $-\exists\, (N_1^3+N_1^3)\cap N_1^3$ { ALCHODSCHANDÎ a.992 {

·1 $n\varepsilon N_0+3 .\supset. -\exists\, (N_1^n+N_1^n)\cap N_1^n$ { FERMAT t.1 p.291:
« Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duas eiusdem nominis fas est dividere: cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi ».{

La dém. se réduit au cas où $n\varepsilon$ Np. Kummer, a.1850 JfM. p.138, a démontré cette P, si : $r\varepsilon 1\cdots(n-3)/2 .\supset_r.$ nt $B_r -\varepsilon N_1\times n$.

·2 $-\exists\, [N_1^2\times(4N_0+3)]\cap(N_0^2+N_0^2)$ { FERMAT a.1640 t.2 p.203:
« Un nombre moindre de l'unité qu'un multiple du quaternaire n'est ni quarré, ni composé de deux quarrés, ni en entiers, ni en fractions ».{

·3 $-\exists\, [N_1^2\times(8N_0+7)]\cap(N_0^2+N_0^2+N_0^2)$ { FERMAT voir 5·42 {

·4 $-\exists\, (N_1^4+N_1^4)\cap N_1^2$. $-\exists\, (N_1^4+N_1^2)\cap N_1^4$ { FERMAT t.1 p.327 {

$>$ ✻ 9. $a,b \varepsilon N_1 \,.\, a -\!= b \;.\supset.$

·01 $a^2+b^2 > 2ab$ [$(a-b)^2>0 \;.\supset.\; P$]

·02 $2(a^2+b^2) > (a+b)^2$ [$P{\cdot}01 \;.\supset.\; P$]

·03 $(a+b)^2 > 4ab$ { EUCLIDES VI P27 } [$P{\cdot}04 \;.\supset.\; P$]

·04 $2(a^3+b^3) > (a+b)(a^2+b^2)$ [$2(a^3+b^3)-(a+b)(a^2+b^2) = (a-b)^2(a+b)>0$]

·05 $4(a^3+b^3) > (a+b)^3$ [$P{\cdot}04 \;.\supset.\; 4(a^3+b^3)>(a+b)\times 2(a^2+b^2) \,.\, P{\cdot}02 \;.\supset.\; P$]

·06 $a^3+b^3 > ab(a+b)$ { HARRIOT p.79 } [$P{\cdot}05 \;.\supset.\; P$]

·07 $3(a^4+a^2b^2+b^4) > (a^2+ab+b^2)^2$ { BERTRAND a.1855 p.142 }

·08 $2(a^4+a^2b^2+b^4) > 3ab(a^2+b^2)$

·09 $4(a^2+ab+b^2)^3 > 27a^2b^2(a^2+b^2)^2$ { HARRIOT a.1631 p.85 }

$a,b,c \varepsilon N_1 \,.\, -(a=b=c) \;.\supset.$

·11 $a^2+b^2+c^2 > ab+ac+bc$ [$(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c^2) \geqq 0 \;.\supset.\; P$]

·12 $3(a^2+b^2+c^2) > (a+b+c)^2 > 3(ab+ac+bc)$

·13 $a<b<c \,.\, a+b>c \;.\supset.\; 2(ab+ac+bc) > a^2+b^2+c^2$

·15 $3(a^3+b^3+c^3) > (a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$

[$3(a^3+b^3+c^3)-(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)=(a-b)^2(a+b)+(b-c)^2(b+c)+(c-a)^2(c+a)$]

·16 $2(a^3+b^3+c^3) > a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)$ [$P{\cdot}15 .\supset.\; P$]

·17 $3(a^3+b^3+c^3) > (a+b+c)(ab+ac+bc)$ [$P{\cdot}11 \,.\, P{\cdot}15 \;.\supset.\; P$]

·18 $9(a^3+b^3+c^3) > (a+b+c)^3$ [$P{\cdot}15 \,.\, P{\cdot}12 \;.\supset.\; P$]

·19 $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b) > 6abc$

[$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)-6abc = a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2$]

·20 $a^3+b^3+c^3 > 3abc$ [$P{\cdot}16 \,.\, P{\cdot}19 \;.\supset.\; P$]

{ ·11·12·19·20 HARRIOT a.1631 p.84 }

·21 $8(a^3+b^3+c^3) > 3(a+b)(a+c)(b+c)$ [$P{\cdot}16 \,.\, P{\cdot}20 \;.\supset.\; P$]

·22 $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) > 9abc$ [$P{\cdot}19 \,.\, P{\cdot}20 \;.\supset.\; P$]

·23 $2(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) > 3[a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)$ [$P{\cdot}16 \supset P$]

·24 $(a+b+c)^3 > 27abc$ [$P{\cdot}19 \,.\, P{\cdot}20 \;.\supset.\; P$]

{ HARRIOT a.1631 p.85 : « Si quantitas secetur in tres partes inæquales Cubus è tertia parte totius major est solido è tribus partibus inæqualibus. Si sint quantitatis tres partes inæquales p, q, r, est...

$$\left.\begin{array}{l} p+q+r \\ p+q+r \\ p+q+r \end{array}\right| > 27pqr$$

» }

·25 $(a+b)(b+c)(c+a) > 8abc$ [$P{\cdot}19 \;.\supset.\; P$]

·26 $a^3+b^3+c^3+3abc > a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)$

·27 $a>b>c \;.\supset.\; a^2b+b^2c+c^2a > a^2c+b^2a+c^2b$ [$P14{\cdot}11 \;.\supset.\; P$

·30 $(ab+ac+bc)^2 > 3abc(a+b+c)$

·31 $a^4+b^4+c^4 > abc(a+b+c)$

$\cdot 32$ $(a+b+c)(a^3+b^3+c^3) \geqq (a^2+b^2+c^2)^2$

$a,b,c,d \varepsilon \mathrm{N}_1 . -(a=b=c=d) . \supset .$

$\cdot 41$ $4(a^2+b^2+c^2+d^2) > (a+b+c+d)^2$ [P14·08 $\supset$ P]

$\cdot 42$ $3(a^2+b^2+c^2+d^2) > 2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$

$\cdot 43$ $3(a+b+c+d)^2 > 8($ » » $)$

$\cdot 51$ $a,b,c,d \varepsilon \mathrm{N}_1 . -(a/b = c/d) . \supset . (a^2+b^2)\times(c^2+d^2) > (ac+bd)^2$

$\cdot 52$ $a,b,c,d,e,f \varepsilon \mathrm{N}_1 . -(a/d = b/e = c/f) . \supset .$
$(a^2+b^2+c^2)\times(d^2+e^2+f^2) > (ad+be+cf)^2$ [P14·53 $\supset$ P]

Continuation : §Σ 20.

❋ 10. $a,b,m,n \varepsilon \mathrm{N}_1 . \supset .$ $\cdot 1$ $a>b . = . a^m > b^m$

$\cdot 2$ $a>1 . \supset : m>n . = . a^m > a^n$

$a -\!= b . \supset .$ $\cdot 3$ $a^{m+2}+b^{m+2} > ab(a^m+b^m)$

[$a^{m+2}+b^{m+2} - ab(a^m+b^m) = (a-b)(a^{m+1}-b^{m+1})$]

$\cdot 4$ $2^m(a^{m+1}+b^{m+1}) > (a+b)^{m+1}$

– n ❋ 11. $a,b \varepsilon \mathrm{n} . m,n \varepsilon \mathrm{N}_0 . \supset .$ $\cdot 0$-$\cdot 2$ = P1·0-·2 $\cdot 3$ $a^m \varepsilon \mathrm{n}$

$\cdot 4$-$\cdot 6$ = P1·4-·6 $\cdot 7$ $(-a)^2 = a^2$

$\cdot 71$ $(-a)\upharpoonright(2m) = a\upharpoonright(2m)$ $\cdot 72$ $(-a)\upharpoonright(2m+1) = -a\upharpoonright(2m+1)$

❋ 12-13. $a,b,c \varepsilon \mathrm{n} . \supset .$ P2 . 3.

❋ 14. $a,b,c,d,e,f,g,h,a',b',c',d',e',f',g',h',p,q \varepsilon \mathrm{n} . \supset :$

$\cdot 01$ $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$

$\cdot 02$ $(a+b)^2+(a-b)^2 = 2(a^2+b^2)$ { Euclides II P9 }

$\cdot 03$ $(a+b)^2-(a-b)^2 = 4ab$ { » » P5 }

$\cdot 04$ $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 =$
$2[(a-b)(a-c)+(b-a)(b-c)+(c-a)(c-b)]$

$\cdot 05$ $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2+(a+b+c)^2 = 3(a^2+b^2+c^2)$

$\cdot 06$ $(a+b+c)^2+(a+b-c)^2+(a-b+c)^2+(-a+b+c)^2 = 4(a^2+b^2+c^2)$

$\cdot 061$ $(a+2b)(b+c-a)+(b+2c)(a-b+c)+(c+2a)(a+b-c) = (a+b+c)^2$

$\cdot 062$ $3(a+b+c)^2 = (a+b-c)^2+(b+c-a)^2+(c+a-b)^2+8(ab+ac+bc)$

$\cdot 07$ $(-a+2b+2c)^2+(2a-b+2c)^2+(2a+2b-c)^2 = 9(a^2+b^2+c^2)$

$\cdot 08$ $(a+b+c+d)^2+(a+b-c-d)^2+(a+c-b-d)^2+(a+d-b-c)^2 =$
$(-a+b+c+d)^2+(a-b+c+d)^2+(a+b-c+d)^2+(a+b+c-d)^2 =$
$4(a^2+b^2+c^2+d^2)$ { Legendre a.1816 p.8 }

$\cdot 09$ $a+b+c+d+e = 5m . \supset . a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 =$
$(2m-a)^2+(2m-b)^2+(2m-c)^2+(2m-d)^2+(2m-e)^2$

{ ·07-·09 Euler a.1750 CorrM. t.1 p.515 }

·10 $(a^2+ab+b^2)(a-b) = a^3-b^3$

·11 $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b) = (a-b)(a-c)(b-c)$

·12 $a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2) = (b-a)(c-a)(c-b)$

·121 $(a-b)^2(a+b-2c)+(b-c)^2(b+c-2a)+(c-a)^2(c+a-2b) = 3(a-b)(b-c)(c-a)$

·122 $(a+b)^2(a-b)+(b+c)^2(b-c)+(c+a)^2(c-a) = -(a-b)(b-c)(c-a)$

·13 $(a+b+c)^3-(b+c-a)^3-(c+a-b)^3-(a+b-c)^3 = 24abc$

{ Gergonne Ann. a.1816-17 t.7 p.163 }

·14 $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$

·15 $a^3+b^3+c^3+d^3-3(abc+abd+acd+bcd)=(a+b+c+d)(a^2+b^2+c^2+d^2-ab-bc-ca-ad-bd-cd)$

·16 $(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) = a^2(b+c-a)+b^2(a+c-b)+c^2(a+b-c)-2abc$

·17 $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3 = 3(a-b)(b-c)(c-a)$

·21 $(a^3+a^2b+ab^2+b^3)(a-b) = a^4-b^4$

·22 $(a^2+ab+b^2)^2-(a^2-ab+b^2)^2 = 4ab(a^2+b^2)$

·23 $a(a-2b)^3-b(b-2a)^3 = (a-b)(a+b)^3$

·24 $(a^2+b^2)^2 = (a^2-b^2)^2+(2ab)^2$ { Euclides x lemma P29 }

Cette P a été attribuée à Pythagore et à Platon par les commentateurs d' Euclides. Voir Proclus ed. Friedlein, Lipsiæ a.1873 p.418; Euclides t.5 p.214.

·25 $a^4+4b^4 = (a^2+2ab+2b^2)(a^2-2ab+2b^2)$

{ Euler a.1742 CorrM. t.1 p.145 }

·26 $a^4+a^2b^2+b^4 = (a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

·27 $a^4+b^4-ab(a^2+b^2) = (a-b)^2(a^2+ab+b^2)$

·28 $(a+b)^4-(a-b)^4 = 8ab(a^2+b^2)$

{ Cauchy Exerc. a.1841 t.2 p.144 }

·31 $a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3 = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

·32 $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b) = (a-b)(a-c)(b-c)(a+b+c)$

·33 $(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) = 2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)-(a^4+b^4+c^4) = (a^2+b^2+c^2)^2-2(a^4+b^4+c^4)$

·34 $[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]^2 = 2[(a-b)^4+(b-c)^4+(c-a)^4]$

·35 $a^4+b^4+c^4=(a+b+c)(a-b-c)(b-c-a)(c-a-b)+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$

·36 $(a+b)(a-b)^3+(b+c)(b-c)^3+(c+a)(c-a)^3 = 2(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$

·37 $ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2) = -(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$

$ab(a+b)^2+bc(b+c)^2+ca(c+a)^2 = (a+b+c)[(a+b)(b+c)(c+a)-4abc]$

$a(b-c)(b+c-a)^2+b(c-a)(c+a-b)^2+c(a-b)(a+b-c)^2 = 0$

·41 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2$
{ Diophantus III P22 }

·42 $(a^2-b^2)(c^2-d^2)=(ac-bd)^2-(ad-bc)^2$

·43 $(a^2+b^2+c^2+d^2)^2=(a^2+b^2-c^2-d^2)^2+(2ac\pm 2bd)^2+(2bc\mp 2ad)^2$
{ P. Tannery IdM. a.1898 p.282 }

·51 $(a^2+cb^2)(a'^2+cb'^2)=(aa'+cbb')^2+c(ab'-a'b)^2$

·52 » » $=(aa'-cbb')^2+c(ab'+a'b)^2$

·53 $(a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2)-(aa'+bb'+cc')^2=$
$(ab'-a'b)^2+(ac'-a'c)^2+(bc'-b'c)^2$

·54 $(a^2+b^2+c^2+d^2)(a'^2+b'^2+c'^2+d'^2)=(aa'+bb'+cc'+dd')^2+(ab'-a'b+cd'-c'd)^2+(ac'-a'c-bd'+b'd)^2+(ad'-a'd+bc'-b'c)^2$
{ Euler PetrNC. t.5 a.1754 p.54 }

·55 $(a^2-pb^2-qc^2+pqd^2)(a'^2-pb'^2-qc'^2+pqd'^2)=$
$(aa'+pbb'\pm q(cc'+pdd'))^2-p(ab'+a'b\pm q(cd'+c'd))^2$
$-q(ac'-pbd'\pm(a'c-pb'd))^2+pq(bc'-ad'\pm(a'd-b'c))^2$
{ Lagrange a.1770 t.3 p.201 }

·6 $(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2+g^2+h^2)(a'^2+b'^2+c'^2+d'^2+e'^2+f'^2+g'^2+h'^2)$
$=(aa'+bb'+cc'+dd'+ee'+ff'+gg'+hh')^2$
$+(ab'-ba'+cd'-dc'+ef'-fe'+gh'-hg')^2$
$+(ac'+bd'-ca'-db'+eg'-fh'-ge'+hf')^2$
$+(ad'+bc'-cb'-da'+eh'+fg'-gf'-he')^2$
$+(ae'-bf'+cg'-dh'-ea'+fb'-gc'+hd')^2$
$+(af'+be'-ch'-dg'-eb'-fa'+gd'+hc')^2$
$+(ag'-bh'-ce'+df'+ec'-fd'-ga'+hb')^2$
$+(ah'+bg'+cf'+de'-ed'-fc'-gb'-ha')^2$

{ Degen, Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg, a.1822 t.8 p.4 }

·64 $x=ab\,.\,y=(a+b)b\,.\,z=a(a+b)(a^2+ab+2b^2)\,.\,w=a^2+ab+b^2$
$.\supset.\ x^4+y^4+z^2=w^4$

·7 $a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)=(a-b)(a-c)(b-c)(ab+ac+bc)$

·71 $a^5+b^5-ab(a^3+b^3)=(a+b)(a-b)^2(a^2+b^2)$

·72 $(a+b+c)^5=(a+b-c)^5+(b+c-a)^5+(c+a-b)^5+80abc(a^2+b^2+c^2)$
{ Cauchy Exercises a.1841 t.2 p.144 }

·73 $(a-b)^5+(b-c)^5+(c-a)^5=$
$5(a-b)(b-c)(c-a)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$

·8 $(a^3+a^2b+ab^2+b^3)^2+(a^3-a^2b+ab^2-b^3)^2 = 2(a^2+b^2)^3$

·81 $(a^3+a^2b-ab^2-b^3)^2-(a^3-a^2b-ab^2+b^3)^2 = 4ab(a^2-b^2)^2$

·82 $(a^3+a^2b-ab^2+b^3)^2-(a^3-a^2b-ab^2-b^3)^2 = 4ab(a^2+b^2)(a^2-b^2)$

·9 $a^7+b^7-ab(a^5+b^5) = (a+b)(a-b)^2(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

·91 $(a^6+b^6)(a+b)-2ab(a^5+b^5)=(a-b)^2(a+b)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

·92 $(a^6+b^6)(a+b)-(a^2+b^2)(a^5+b^5)=(a-b)^2(a+b)(a^2+b^2)ab$

·93 $(a+b+c)^7-(a+b-c)^7-(a-b+c)^7-(-a+b+c)^7 =$
$56abc[3(a^4+b^4+c^4)+10(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)]$

{ Lamé a.1840 JdM. t.5 p.197 }

·94 $(a^4+a^3b-a^2b^2+ab^3+b^4)^2-(a^4-a^3b-a^2b^2-ab^3+b^4)^2 =$
$4ab(a^2+b^2)(a^4-a^2b^2+b^4)$

·95 $(a^4+a^3b-a^2b^2-ab^3+b^4)^2-(a^4-a^3b-a^2b^2+ab^3+b^4)^2 =$
$4ab(a^2-b^2)(a^4-a^2b^2+b^4)$

·96 $a^9+b^9-ab(a^7+b^7) = (a+b)(a-b)^2(a^2+b^2)(a^4+b^4)$

✻ 15·0 $u \varepsilon$ Cls'n . $v \varepsilon$ Cls'N_0 . $a \varepsilon$ n . $b \varepsilon N_0$.$\supset$. P5·0

·1 4n $\supset$ n^2-n^2 ·11 $n \varepsilon N_1+1$.$\supset$. $N_0^n \supset N_0^2-N_0^2$

·12 $a \varepsilon (2N_0+1)-(5N_0)$.$\supset$. $a^4-1 \; \varepsilon \; 80N_0$

·13 n $\supset$ $n^3+n^3+n^3+n^3+n^3$ { Oltramare IdM. a.1895 p.25,166 }

$a \varepsilon$ n .$\supset$. ·2 $(2a-1)^2-1 \; \varepsilon$ 8n ·21 $a(a^2-1) \; \varepsilon$ 6n

·22 $a^2(a^2-1) \; \varepsilon$ 12n { Leibniz MathS. t.7 p.101 }

·23 $a(a^2-1)(a^2-4) \; \varepsilon$ 120n Continuation : §! P1·1

·24 $a^2(a^4-1) \; \varepsilon$ 60n . $a^2(a^2-1)(a^4-16) \; \varepsilon$ 3600n

·25 $a^2(a^2-2)(a^4-1)(a^4-16) \; \varepsilon$ 25200n ·26 $a(a^{12}-1) \; \varepsilon$ 2730n

·27 $a^2(a^4-1)(a^4-9)(a^4-16) \; \varepsilon$ 46800n

$a,b \varepsilon$ n .$\supset$. ·3 $ab(a^2-b^2) \; \varepsilon$ 6n ·31 $ab(a^2+b^2)(a^2-b^2) \; \varepsilon$ 30n

·4 $a \varepsilon$ 2n+1 .$\supset$. $a(a^4-1) \; \varepsilon$ 240n . $a^2(a^2-1)(a^4-1) \; \varepsilon$ 5760n .
$a^2(a^2-1)(a^6-1) \; \varepsilon$ 4032n . $a^2(a^4-1)(a^8-1) \; \varepsilon$ 115200n

·5 $n \varepsilon N_0$.$\supset$. $11^{2n}-2^{6n} \; \varepsilon \; 57N_0$. $2^{2n}-3n-1 \; \varepsilon \; 9N_0$.
$2^{3n+2}+21n-4 \; \varepsilon \; 49N_0$. $3^{2n}-8n-1 \; \varepsilon \; 64N_0$. $2^{4n}-15n-1 \; \varepsilon \; 225N_0$.
$7^{2n+1}-48n-7 \; \varepsilon \; 288N_0$.
$3^{3n-3}+7^n \times 2^{3n-1} \; \varepsilon \; 29N_1$. $2^{5n}\times 3^{4n}-4^{3n}\times 5^{2n} \; \varepsilon \; 992N_1$

·6 $a,b \varepsilon$ n . $m \varepsilon N_1$.$\supset$. $a^m-b^m \; \varepsilon$ n$\times(a-b)$. $a^{2m}-b^{2m} \; \varepsilon$ n$\times(a+b)$

·61 $a \varepsilon$ n . $n \varepsilon N_1-3N_1$.$\supset$. $a^{2n}+a^n+1 \; \varepsilon \; N_1 \times (a^2+a+1)$

{ Euler Op. post. t.1 p.186 }

·7 $n \varepsilon\, 6N_1 - 1 \,.\, a,b \varepsilon N_1 \,.\supset.$
$(a+b)^n - a^n - b^n \;\varepsilon\; nab(a+b)(a^2+ab+b^2) \times N_1$
·71 $n \varepsilon\, 6N_1 + 1 \,.\, a,b \varepsilon N_1 \,.\supset.$
$(a+b)^n - a^n - b^n \;\varepsilon\; nab(a+b)(a^2+ab+b^2)^2 \times N_1$
} Cauchy a.1839 Œuvres s.1 t.4 p.501; Exerc. a.1841 t.2 p.137 {

❋ 16. $a,b,c \varepsilon N_1 \,.\, -(a=b=c) \,.\supset.$
·1 $(a+b-c)^2 + (a+c-b)^2 + (b+c-a)^2 > ab+bc+ca$
·2 $abc > (a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)$ } Bertrand a.1855 p.142 {
[$(b+c-a,\ a+c-b,\ a+b-c) | (a,\ b,\ c)$ P9·25 $.\supset.$ P]

·3 $(a-b)^2(a+b-c) + (b-c)^2(b+c-a) + (c-a)^2(c+a-b) > 0$

❋ 21. $a,b \varepsilon R \,.\, m,n \varepsilon N_0 \,.\supset.$ ·0-·2 = P1·0-·2 ·3 $a↾m\ \varepsilon R$
·4-·6 = P1·4-·6 ·7 $/(a^m) = (/a)^m$ ·71 $(a/b)^m = a^m/b^m$
$(R|N_0)$ P2. 3. $(R|N_1)$ P9. 10

❋ 22.
·1 $m \varepsilon\, N_1+1 \,.\, a \varepsilon R \,.\supset.\, (1+a)^m > 1+ma$
[Hp . $m=2$ $.\supset.$ $(1+a)^2 = 1+2a+a^2 > 1+2a$ (1)
Hp . $(1+a)^m > 1+ma$ $.\supset.$
$(1+a)^{m+1} > (1+ma)(1+a) > 1+ma+a+ma^2 > 1+(m+1)a$ (2)
(1) . (2) . Induct $.\supset.$ P]

·2 ———————— . $a<1 \,.\supset.\, (1-a)^m > 1-ma$
[Hp . $m=2$ $.\supset.$ $(1-a)^2 = 1-2a+a^2 > 1-2a$ (1)
Hp . $(1-a)^m > 1-ma$ $.\supset.$
$(1-a)^{m+1} > (1-ma)(1-a) > 1-(m+1)a+ma^2 > 1-(m+1)a$ (2)
(1) . (2) . Induct $.\supset.$ P]
Ex. : §ϑ P·9 Dem.

·3 $a,b \varepsilon R \,.\, a<b \,.\, m \varepsilon N_1 \,.\supset.\, \exists\, R \frown x \ni (a < x^m < b)$
·4 $a,b \varepsilon\, 1+R \,.\supset.\, \exists\, N_0 \frown x \ni [a^x \leqq b < a^{x+1}]$

❋ 30·0 $a \varepsilon R \,.\, m \varepsilon N_1 \,.\supset.\, a^{-m} = /a^m$ Df
$a,b \varepsilon R \,.\, m,n \varepsilon n \,.\supset.$ ·1 $a^m\ \varepsilon R$ ·2 $a^m a^n = a^{m+n}$
·3 $(ab)^m = a^m b^m$ ·4 $(a^m)^n = a^{mn}$ ·5 $a^{-m} = /a^m$
·6 $a^n/a^m = a^{n-m}$

} Chuquet a.1484 fol.87 : « qui partit .72.² par .8.⁵ Il treuue ala part ·9.3.m » [Version : $(72x^2)/(8x^5) = 9x^{-3}$] }

❋ 31-34. (r | n) P11-14

❋ 35. $a \varepsilon\, r\text{-}\iota 0 \,.\, m \varepsilon N_1 \,.\supset.$ P30·0 Df
$a,b \varepsilon\, r\text{-}\iota 0 \,.\, m,n \varepsilon n \,.\supset.$ P30·1-·6

§31 ···

$+$ n ·0 $a \varepsilon \mathrm{n} . b \varepsilon a+\mathrm{N}_0 . \supset . a \cdots b = (a+\mathrm{N}_0) - (b+\mathrm{N}_1)$ Df

·1 $a \varepsilon \mathrm{n} . b \varepsilon \mathrm{N}_1 . \supset . a \cdots (a+b) = a+(0 \cdots b) . a \cdots a = \iota a$

Note. $a \cdots b$, qu'on peut lire " de a à b ", désigne l'ensemble des nombres a, $a+1$, etc., b. Ex.: §Num P·9, §Σ P1, ...

·2 $a,b \varepsilon \mathrm{n} . c \varepsilon a+\mathrm{N}_0 . d \varepsilon b+\mathrm{N}_0 . \supset . (a \cdots c)+(b \cdots d) = (a+b) \cdots (c+d)$

·3 $a,b \varepsilon \mathrm{n} . c \varepsilon b+\mathrm{N}_0 . \supset . a+(b \cdots c) = (a+b) \cdots (a+c)$ $\{$ Distrib$(+, \cdots)\}$

·4 $m \varepsilon \mathrm{N}_1 . \supset . \mathrm{N}_0 = m\mathrm{N}_0 + 0 \cdots (m-1) . \mathrm{n} = m\mathrm{n} + 0 \cdots (m-1)$

·5 $a \varepsilon \mathrm{N}_1 . \supset . \exists \mathrm{N}_1 \frown x \ni [x + 0 \cdots a \supset \mathrm{N}_1 - \mathrm{N}_1 \upharpoonright (1+\mathrm{N}_1)]$

Continuation : §Σ, §*Π*.

§32 Num infn

f rcp ·0 $a,b \varepsilon \mathrm{Cls} . \supset : \mathrm{Num}a = \mathrm{Num}b . = . \exists (bfa)\mathrm{rcp}$ Df

« Num$a$ » signifie « le nombre (numerus) des a ».

On l'appelle aussi « puissance (Mächtigkeit) de a », notamment si la classe a est infinie. Sur les différentes notations voir les F1895...

La définition ·0 est exprimée par les seuls signes de logique. On peut commencer ici l'Arithmétique : nous définirons directement les signes $>$ 0 N_0 $+$ $\times$ $\upharpoonright$, sans passer par les idées primitives du §20.

La P·0 définit l'égalité « Num$a$ = Num$b$ », qui subsiste si l'on peut établir une correspondance réciproque entre a et b.

Nous n'écrivons pas une égalité de la forme

Num a = (expression composée par les symboles précédents).

La P·0 est une Df par abstraction de Num$a$.

Etant donnée une classe a, on peut considérer la classe de classes :

$$\mathrm{Cls} \frown x \ni [\exists\, x f a)\mathrm{rcp}] ;$$

l'égalité de ces Cls de Cls, calculées sur les classes a et b importe l'égalité Num a = Num b ; mais on ne peut pas identifier Num a avec la Cls de Cls considérée, car ces objets ont des propriétés différentes.

Num ' Cls signifie « le nombre d'une classe ». Ces nombres coïncident avec les N_0 pour les classes finies ; G. Cantor les appelle « nombres cardinaux ». Dans F1895 on a introduit le symbole « Nc » pour les représenter.

< ·1 $x,y \varepsilon$ Num'Cls .⊃∴ $x \leqq y$.=:
$a,b \varepsilon$ Cls . Num $a = x$. Num $b = y$.⊃$_{a,b}$. ∃ (bfa)sim Df
·11 Hp·1 .⊃: $x < y$.=. $x \leqq y$. $x -= y$ Df
·12 $a,b \varepsilon$ Cls .⊃: Num $a \leqq$ Num b .=. ∃ (bfa)sim
·13 » » » .=. ∃ Cls'$b \cap x \ni$(Num$a$ = Num$x$)
·14 » . a⊃b .⊃. Num $a \leqq$ Num b
·15 $x,y,z \varepsilon$ Num'Cls . $x \leqq y$. $y \leqq z$.⊃. $x \leqq z$

0 ·2 0 = Num Λ Df
·21 $a \varepsilon$ Cls .⊃: Num$a$ = 0 .=. −∃ a Dfp
·22 $x \varepsilon$ Num'Cls .⊃. $0 \leqq x$
·23 1 = ι Num'[Cls ∩ $a \ni$(∃a : $x,y \varepsilon a$.⊃$_{x,y}$. $x = y$)] Df
·24 $a \varepsilon$ Cls .⊃∴ Num a = 1 .=: ∃a : $x,y \varepsilon a$.⊃$_{x,y}$. $x = y$

infn ·3 infn =
Num'{Cls ∩ $a \ni$[∃ Cls ∩ $u \ni$(u⊃a . $u -= a$. Num$u$ = Num$a$)]} Df
·31 $a \varepsilon$ Cls .⊃:
Num a ε infn .=. ∃ » » » » » »
« infn » = « un infini ». Ces infinis ne sont pas tous égaux ; ils forment une Cls. Le signe ∞ du §1' représente un individu.

N_0 ·4 N_0 = (Num'Cls) − infn Df
·41 $a \varepsilon$ Cls .⊃. Num a ε N_0 ∪ infn
·42 Num N_1 = Num N_0 [+ ε (N_0 f N_1)rep]
·43 Num N_0 ε infn
La condition Num$a$ = Num N_0 est exprimée par plusieurs A. sous les formes « l'ensemble a est dénombrable » ou « il a la première puissance ».
·44 $x \varepsilon$ Num'Cls . $y \varepsilon N_0$. $x \leqq y$.⊃. $x \varepsilon N_0$
·45 » » . $x \leqq$ Num N_0 . $x \varepsilon$ infn .⊃. x = Num N_0
·46 Num N_0 = Num n = Num(N_0 : N_0) = Num R = Num r
·47 Num (Cls' N_0) > Num N_0
·48 Num(Cls'N_0) = Num(N_0fN_0)

+ ·5 $x,y \varepsilon$ Num'Cls .⊃. $x + y$ = ι $z \ni$[$a,b \varepsilon$ Cls . Num $a = x$.
Num $b = y$. $a \cap b$ = Λ .⊃$_{a,b}$. z = Num($a \cup b$)] Df
·51 $a,b \varepsilon$ Cls . $a \cap b$ = Λ .⊃. Num($a \cup b$) = Num a + Num b
·52 » .⊃. Num($a \cup b$) + Num($a \cap b$) = Num$a$ + Num$b$
·53 » » Num($a \cup b$) = Num$a$ + Num($b - a$)
·54 $x,y,z \varepsilon$ Num'Cls .⊃. $x + y = y + x$. $x + (y + z) = (x + y) + z$
. $0 + x = x$. $x \leqq x + y$

·55 $x \varepsilon N_0 . \supset . x + \text{Num} N_0 = \text{Num} N_0$

·56 $\text{Num} N_0 + \text{Num} N_0 = \text{Num} N_0$

$\times$ ·6 $x,y \varepsilon \text{Num}'\text{Cls} . \supset . x \times y = \iota z \ni [a,b \varepsilon \text{Cls} . \text{Num} a = x . \text{Num} b = y . \supset_{a,b} . z = \text{Num}(a{:}b)]$ Df

·61 $a,b \varepsilon \text{Cls} . \supset . \text{Num}(a{:}b) = \text{Num} a \times \text{Num} b$

·62 $x,y,z \varepsilon \text{Num}'\text{Cls} . \supset . xy = yx . x(yz) = (xy)z . x(y+z) = xy + xz$

·63 $x \varepsilon N_0 . \supset . x \times \text{Num} N_0 = \text{Num} N_0$

·64 $\text{Num} N_0 \times \text{Num} N_0 = \text{Num} N_0$

$\upharpoonleft$ ·7 $x,y \varepsilon \text{Num}'\text{Cls} . \supset . x \upharpoonleft y = \iota z \ni [a,b \varepsilon \text{Cls} . \text{Num} a = x . \text{Num} b = y . \supset_{a,b} . z = \text{Num}(a \text{F} b)]$ Df

·71 $a,b \varepsilon \text{Cls} . \supset . \text{Num}(a \text{F} b) = \text{Num} a \upharpoonleft \text{Num} b$

·72 $a \varepsilon \text{Cls} . \supset . \text{Num}(\text{Cls}'a) = 2 \upharpoonleft \text{Num} a$

·73 $2 \upharpoonleft \text{Num} N_0 = \text{Num} N_0 \upharpoonleft \text{Num} N_0 > \text{Num} N_0$

·8 $m \varepsilon N_1 . \supset : \text{Num} a = m . = . \exists (a \text{f} 1 \cdots m) \text{rcp}$ Df

·81 $m \varepsilon N_1 . \supset . \text{Num} \, 1 \cdots m = m$

·82 $m,n \varepsilon N_1 . \supset . \text{Num}(1 \cdots m \text{ F } 1 \cdots n) = m^n$

·83 $m \varepsilon N_1 . \supset . \text{Num}(N_0 \text{ F } 1 \cdots m) = \text{Num} N_0$

·84 $\text{Num}[(N_0 \text{F } 0 \cdots n) | n \text{'} N_0] = \text{Num} N_0$

{G. Cantor, *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre*, JfM. a.1877}

La bibliographie de ce sujet, très vaste, due à M. Vivanti, est citée dans § δ. La réduction de cette théorie en symboles est encore assez incomplète.

Continuation : §Σ 1. §! 4. §Np 7. 12·7 §Φ §Q 70. §δ 2.

§33 $\Sigma =$ (somme)

$+ \cdots$ ✻ 1·0 $m \varepsilon \mathrm{N}_0 . f \varepsilon \mathrm{r\,f}\, 1 \cdots (m+1) .\supset.$
$\Sigma(f, 0 \cdots 0) = f0 \quad . \quad \Sigma(f, 0 \cdots (m+1)) = \Sigma(f, 0 \cdots m) + f(m+1)$ Df

·1 $m \varepsilon \mathrm{n} . n \varepsilon m + \mathrm{N}_0 . f \varepsilon \mathrm{r\,f}\, m \cdots n .\supset. \Sigma(f, m \cdots n) =$
$fm + f(m+1) \ldots + fn = \Sigma[f(m+r) | r, 0 \cdots (n-m)]$ Df

·2 Hp·1 $.\supset. \Sigma(f, m \cdots n) \varepsilon \mathrm{r}$

·3 Hp·1 $. g \varepsilon [(m \cdots n) \mathrm{f} (m \cdots n)] \mathrm{rcp} .\supset. \Sigma(fg, m \cdots n) = \Sigma(f, m \cdots n)$

·4 $m, n, p \varepsilon \mathrm{n} . m < n < p . f \varepsilon \mathrm{r\,f}\, (m \cdots p) .\supset.$
$\Sigma(f, m \cdots p) = \Sigma(f, m \cdots n) + \Sigma[f, (n+1) \cdots p]$

·5 $m \varepsilon \mathrm{N}_0 . f, g \varepsilon \mathrm{r\,f}\, 0 \cdots m .\supset.$
$\Sigma[(fr + gr) | r, 0 \cdots m) = \Sigma(f, 0 \cdots m) + \Sigma(g, 0 \cdots m)$

·6 $m, n \varepsilon \mathrm{N}_1 . u \varepsilon \mathrm{rf}(1 \cdots m \,\vdots\, 1 \cdots n) .\supset.$
$\Sigma \{ \Sigma[u(r,s) | r, 1 \cdots m] | s, 1 \cdots n \} = \Sigma \{ \Sigma[u(r,s) | s, 1 \cdots n] | r, 1 \cdots m \}$

$\Sigma(f,u)$ indique la somme des valeurs de la fonction f, lorsque la variable prend les valeurs appartenant à une classe u.

La P·0 définit par induction $\Sigma(f, 0 \cdots m)$. La P·1 réduit au cas précédent $\Sigma(f, m \cdots n)$. Elle introduit aussi la notation $fm + \ldots + fn$, commode dans quelques cas, mais insuffisante en général. Car par ex. 1+2+...+1 indique la somme d'une suite, dont on connaît le premier, le second, et le dernier, sans connaître les autres termes, ni leur nombre.

Les P21 définissent $\Sigma(f,u)$ dans d'autres cas.

On rencontre le signe Σ dans Lagrange a.1772 t.3 p.451.

Dans la notation $\sum_m^n {}_r fr$ (Cauchy) le signe Σ porte trois indices m,n,r.

·3. « Une somme est indépendante de l'ordre de ses termes. »

On peut indiquer le couple formé par une fonction f et la classe des valeurs de la variable par une lettre seule, qui représente une fonction F. Ex. P11·4 20 21 22.

$\times$ ✻2. $m \varepsilon \mathrm{N}_1 . f \varepsilon \mathrm{r\,f}\, 0 \cdots m . a \varepsilon \mathrm{r} .\supset.$

·2 $a \times \Sigma(f, 1 \cdots m) = \Sigma[a(fr) | r, 1 \cdots m]$

·3 $m, n \varepsilon \mathrm{N}_1 . f \varepsilon \mathrm{r\,f}\, 0 \cdots m . g \varepsilon \mathrm{r\,f}\, 0 \cdots n .\supset.$
$\Sigma(f, 0 \cdots m) \times \Sigma(g, 0 \cdots n) = \Sigma \{ \Sigma[(fr \times gs) | s, 0 \cdots n] | r, 0 \cdots m \}$

·4 $a \times m = \Sigma\, \iota\, (\iota a \,\mathrm{F}\, 1 \cdots m)$ Dfp

✻ 3. $m \varepsilon N_1 . \supset .$

·1 $1+2+3+\ldots+m = \Sigma(\text{idem}, 1 \cdots m) = m(m+1)/2$

·2 $\Sigma[(2r+1)|r, 0 \cdots m] = 1+3+5+\ldots+(2m+1) = (m+1)^2$

{ ·1-·2 Pythagoras ; Voir Theon Smyrnaeus p. 27, 28 }

·3 $\Sigma[r(r+1)|r, 1 \cdots m] = m(m+1)(m+2)/3$ {Aryabhata P21}

·4 $\Sigma[r(r+1)(r+2)|r, 1 \cdots m] = m(m+1)(m+2)(m+3)/4$

{ Alqâchânî a.1589 p.247 } Continuation : §*II* 7·1

✻ 4. $m,n \varepsilon N_1 . s_m = \Sigma(r^m|r, 1 \cdots n) . \supset .$

·1 $s_1 = n(n+1)/2$ [= P3·1]

$s_2 = n(n+1)(2n+1)/6$

{ Archimedes *Περὶ Ἑλιχῶν* P10 ; Aryabhata P22:

« Le dernier terme, celui-ci plus 1, celui-ci plus le nombre des termes; du produit de ces trois nombres prenez le sixième, c'est le volume de la pile des carrés. » }

$s_3 = [n(n+1)/2]^2 = s_1{}^2$

{ Nicomachus a.50 *Arith.* II 20. Aryabhata P22 }

$s_4 = n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)/30$

{ Alqâchânî p. 247 }

{ Fermat a.1636 t.2 p.69 :

« Exponantur quotlibet numeri in progressione naturali ab unitate; si a quadruplo ultimi, binario aucto et in quadratum trianguli numerorum ducto, demas summam quadratorum a singulis, fiet quintuplum quadrato-quadratorum a singulis. » }

$s_5 = n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)/12$

$s_6 = n(n+1)(2n+1)[3n^2(n+1)^2-(3n^2+3n-1)]/42$

$s_7 = n^2(n+1)^2[3n^2(n+1)^2-2(2n^2+2n-1)]/24$

{ Wallis a.1655 t.1 p.381 }

$s_8 = n(n+1)(2n+1)[5n^3(n+1)^3-10n^2(n+1)^2+3(3n^2+3n-1)]/90$

$s_9 = n^2(n+1)^2[2n^3(n+1)^3-5n^2(n+1)^2+3(2n^2+2n-1)]/20$

$s_{10} = n(n+1)(2n+1)[3n^4(n+1)^4-10n^3(n+1)^3+17n^2(n+1)^2 -$
$5(3n^2+3n-1)]/66$

$s_{11} = n^2(n+1)^2[2n^4(n+1)^4-8n^3(n+1)^3+17n^2(n+1)^2-$
$10(2n^2+2n-1)]/24$

{ Jac. Bernoulli a.1713 p.97 } Continuation : §C 7·3 §B ·3

·2 $5s_4 = s_2(6s-1)$ $3s_5 = 4(s_1)^3-s_3$ $7s_6 = 12s_2s_3 - 5s_4$

$s_7 = 2(s_3)^2-s_5$ { Jacobi, cfr. *Briefwechsel zwischen Gauss und Schuhmacher* t.5 p.299 a.1863 }

$12(s_2)^5 = 16s_6 - 5s_4 + s_2$

{ Amigues AnnN. s.2 t.10; IdM. a.1894 p.29 136 }

$2s_7 = 4s_3^2 - 3s_2^2 + s_1^2$ $\quad 2s_5 = 3s_2^2 - s_1^2$ { Lucas a.1891 p.249 }

✻ 5·1 $m \varepsilon \mathrm{N}_1 \,.\supset.\, \Sigma(2r+1)^2 | r, 0\cdots m] = (m+1)(2m+1)(2m+3)$

$\Sigma[(2r+1)^3 | r, 0\cdots m] = (m+1)^2(2m^2+4m+1)$

{ Ibn Albanna a.1275 }

·2 $x \varepsilon \mathrm{N}_0^3 \,.\supset.\, \exists(\mathrm{N}_0^3 \mathrm{F}\, 1\cdots 9) \frown f \ni (x = \Sigma f)$ { Waring a.1782 p.349; Jacobi a.1851; Dm: Oltramare a.1895 IdM. p.31 }

✻ 6. $a, b \varepsilon \mathrm{r} \,.\, m \varepsilon \mathrm{N}_1 \,.\supset.$

·1 $\Sigma(a^{m-r} b^r \,|\, r, 0\cdots m) = (b^{m+1} - a^{m+1}) / (b-a)$

{ Ahmès N.79: $7+49+343+2401+16807 = 7 \times 2801 = 19607$

Note. Les nombres 7, 49, ... sont les puissances de 7; on ne voit pas d'où l'A. a tiré le nombre 2801; si, selon Eisenlohr, il provient de la division $(7^5-1)/(7-1)$, alors on a la formule précédente. }

{ Euclides IX P35 }

$m \varepsilon \mathrm{N}_1 \,.\, x, y, a \varepsilon \mathrm{r\, f}\, 1\cdots m \,.\supset.$

·2 $\Sigma(x^2, 0\cdots m) \times \Sigma(y^2, 0\cdots m) - [\Sigma(xy, 0\cdots m)]^2 =$

$\Sigma\{\Sigma[(x_r y_s - x_s y_r)^2 | s, (r+1)\cdots m] \,|\, r, 0\cdots(m-1)\}$

·3 $\Sigma(ax^2, 0\cdots m) \times \Sigma(ay^2, 0\cdots m) - [\Sigma(axy, 0\cdots m)]^2 =$

$\Sigma\{\Sigma[a_r a_s (x_r y_s - x_s y_r)^2 \,|\, s, (r+1)\cdots m] \,|\, r, 0\cdots(m-1)\}$

✻ 7·1 $n \varepsilon \mathrm{N}_1 \,.\supset.\, \Sigma[1/r, (n+1)\cdots 2n] = \Sigma[(-1)^r/r \,|\, r, 1\cdots 2n]$

{ Catalan JdM. a.1875 s.3 t.1 p.240 }

✻ 8·1

$n \varepsilon \mathrm{N}_1 \,.\, a \varepsilon \mathrm{n\, f}\, 1\cdots n \,.\supset.\, \mathrm{r} \frown x \ni [x^n + \Sigma(a_r x^{n-r} | r, 1\cdots n) = 0] \supset \mathrm{n}$

✻ 10 $n \varepsilon \mathrm{N}_1 \,.\, a \varepsilon (0\cdots 9)\mathrm{f}(0\cdots n) \,.\supset.$

$a_n \ldots a_2 a_1 a_0 = a_0 + a_1 \mathrm{X} + a_2 \mathrm{X}^2 + \ldots + a_n \mathrm{X}^n = \Sigma(a_r \mathrm{X}^r \,|\, r, 0\cdots n)$ Df

Note sur les systèmes de numération.

Cette P donne la définition symbolique de notre système de numération. Le mot « chiffre » correspond au symbole $0\cdots 9$. Si a et b sont des chiffres, ab désigne $a\mathrm{X}+b$. Mais par la § $\times$ P1·0, ab a aussi la valeur $a \times b$. Cette représentation par le même signe de deux objets différents, commune à tous les livres, n'a pas apporté des sérieuses difficultés; et en apporte moins dans notre travail, où figurent rarement les nombres écrits dans le système décimal.

Les anciens Egyptiens avaient des signes pour indiquer les unités des différents ordres. Un nombre est alors exprimé comme somme de ces unités (M. Cantor, p. 44). Si l'on remplace les signes qui représentent 10, 100, 1000... par X, C, M, le nombre 1898 sera représenté à la façon des égyptiens par

$$\mathrm{M}\begin{matrix}\mathrm{CCCC} & \mathrm{XXXX} & \mathrm{IIII}\\ \mathrm{CCCC} & \mathrm{XXXXX} & \mathrm{IIII}\end{matrix}$$

Le même système fut en usage chez les Babyloniens, les Phéniciens, etc.

Les Etrusques et les Romains ont représenté 1 par 1, 10 par X, 100 1000 par des signes, qu' on a dans la suite déformés en C et M. Ces signes sont, selon M. Lindemann, d'origine égyptienne. Ils ont introduit des signes, moitiés des précédents, pour représenter

$$5 = \mathrm{V}, \quad 50 = \mathrm{L}, \quad 500 = \mathrm{D}\,.$$

Les Grecs ont attribué aux lettres de leur alphabet une valeur numérique:

$\alpha = 1,\ \beta = 2,\ \ldots,\ \vartheta = 9,\ \iota = 10$

$\varkappa = 20,\ \lambda = 30,\ \ldots\ ϙ = 90,\ \varrho = 100,\ \sigma = 200,\ \ldots.\ {}_{,}\alpha = 1000,\ \ldots.$

P. ex. ${}_{,}\alpha\omega ϙ \eta' = 1898$.

Le même système de numération est encore en usage chez les Arabes, concouramment aux chiffres indiens; ils ont remplacé les lettres grecques, de α à π, par les lettres arabes correspondantes.

Dans ces systèmes un nombre est exprimé par la somme des nombres représentés par les signes simples.

Les anciens peuples ont aussi fait usage de chiffres négatifs, indiqués par la position à droite du nombre supérieur chez les Etrusques, à gauche chez les Romains, par un signe spécial chez les Babyloniens.

Les Chinois et les Japonais se servent de signes simples, ayant la valeur de 1, 2,... 9, X, C, M, par lesquels nous les remplaçons. Les signes pour représenter 1, 2, 3 sont 1, 2, 3 barres, comme chez les Egyptiens et les Romains. Le nombre 1898 est exprimé, sauf la forme des signes, et en substituant les lignes aux colonnes, par 1M8C9X8; c'est-à-dire comme somme et produit des signes simples.

Dans tous ces systèmes il n' y a pas de 0, ni de valeur de position des chiffres. L'introduction du 0, l'indication des puissances de la base par la position des chiffres, et la suppression des signes simples pour les représenter s'est opérée chez les Indiens vers l'a. + 400 (M. Cantor, p. 569), d'où elle s'est répandue chez les Arabes vers l'a. + 800, et en Europe vers l'a. 1200.

La valeur de position est la même, soit chez les Hindous et les Européens, dont l'écriture est dirigée de gauche à droite, soit chez les Arabes, dont l'écriture est dirigée en sens contraire.

Dans l'A. chinois, cité à la P2 du §N, il y a le 0, et la valeur de position des chiffres, qui ont à peu près la forme

$\underline{\quad}$	$\underline{\mathrm{I}}$	$\underline{\mathrm{II}}$	$\underline{\mathrm{III}}$	$\underline{\mathrm{IIII}}$	$\overline{\quad}$	$\overline{\mathrm{I}}$	$\overline{\mathrm{II}}$	$\overline{\mathrm{III}}$	$\overline{\mathrm{IIII}}$
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9.

Cette forme, semblable à la notation des Romains, est la représentation graphique du « Soan pan » ou abaque des Chinois.

La division des nombres en tranches de trois chiffres nous vient des Romains, qui comptaient par milliers. Les Grecs comptaient par myriades, ce qui correspond à lire les nombres par tranches de 4 chiffres. Ainsi opère Archimedes, dans l'« Arenarius » (ψαμμίτης) pour lire des nombres jusqu'à 64 chiffres.

La numération parlée appartient au domaine de la philologie.

Ariabhata a attribué une valeur numérique aux sons de la langue sanscrite, afin d'apprendre par cœur des tables de trigonométrie et d'astronomie. (Cfr. RODET, Journal Asiatique, a. 1880). On a proposé des systèmes analogues chez nous. Voir F1898 P110.

Sans changer la base du système de numération, Cauchy, par l'introduction des chiffres négatifs, a réduit de moitié le nombre des chiffres (*Œuvres* s.1 t.5 p.434).

Pour réduire les conventions sur les chiffres au plus petit nombre possible, il faut choisir pour base de numération le nombre 2. Ce système de numération a des propriétés curieuses.

Deux signes suffisent pour indiquer les nombres dans la base 2; p. ex. un signe visible, et l'absence du signe, pourvu que la place soit suffisamment indiquée. P. ex. si l'on adopte les signes . et ! pour indiquer 0 et 1, ou le signe . pour indiquer une place et ! pour indiquer l'unité, les premiers nombres seront indiqués par . ! !. !! !.. !.! !!. etc.

L'objection que dans une base petite, augmente le nombre des chiffres qu'on doit écrire pour représenter les différents nombres, n'est quon apparente. Car un nombre écrit dans la base 2 est aussi écrit dans les bases 4, 8, 16,..., si on le décompose en tranches de 2, 3, 4,... chiffres.

Groupons 8 chiffres à la fois, et disposons-les circulairement, dans l'ordre

5 4 3
6❋2 on a :
7 8 1 ⸜=1 ‐=2 ʼ=4 ❦=24 ❋=255 ⇜⸙=1900

Pour lire rapidement les nombres ainsi exprimés, on peut faire correspondre aux 256 chiffres de la base 2^8 autant de syllabes faciles à prononcer.

P. ex. donnons aux signes :

	.!..	..!.	.!!.	!...	!!..	!.!.	!!!.	...! ....
les valeurs	*b*	*d*	*g*	*f*	*p*	*t*	*k*	*i*
et à	.... !...	.... .!..	.... !!..	.... ..!.	....!	.... ..!!		
les valeurs	*a*	*u*	*o*	*l*	*m*	*s*,		

et à leurs groupements la syllabe qui résulte de leur suite, en convenant de prononcer *e* lorsqu'il n'y a pas de voyelle.

On peut même faire des conventions, par lesquelles toute syllabe soit représentée par un chiffre ; on rencontre ainsi un système d'écriture que nous avons développé dans :

La numerazione binaria applicata alla stenografia, TorinoA. a. 1898.

Les calculs dans la base 2 s'effectuent rapidement si l'on représente les unités des différents ordres par des dames sur une ligne du damier. Ex :

|o|o| | |o| |o|o| = !!..!.!! = 203 = pas.

La table de multiplication se réduit à $1\times1=1$. On peut adopter les bandes de papier.

La division s'exécute sans les tâtonnements nécessaires dans notre système. (Leibniz, *MathS.* t.7 p.223-243).

Legendre a.1797 p.229 adopte la numération binaire pour calculer des grandes puissances.

Voir aussi E. Lucas, *Récréations mathématiques,* a.1891 t.1 p.145.

✻ 11. $m,n \varepsilon \mathrm{N}_1 . a \varepsilon (0 \cdots 9)\mathrm{f}(-m \cdots n) .\supset.$

$$a_n\, a_{n-1} \ldots a_1\, a_0 \cdot a_{-1}\, a_{-2} \ldots a_{-m} = \Sigma(a_r \mathrm{X}^r | r, -m \cdots n) \qquad \mathrm{Df}$$

Le développement d'un nombre rationnel selon les puissances positives et négatives de la base 60 se rencontre chez les astronomes babyloniens et les géomètres grecs (voir §π P1·3); elle est encore en usage dans la division des angles et du temps.

Regiomontanus (a.1436 ⊢ 1476) en supposant le rayon du cercle trigonométrique $= 10^7$, a supprimé tout signe pour indiquer la partie décimale d'une fraction.

François Viète (a.1579) dans son *Canon Mathematicus* indique la partie décimale par des chiffres plus petits et soulignés. Il écrit 314,159,$\underline{265,35}$ ce que nous écrivons 314 159·265 35. Il a aussi exposé les avantages des fractions décimales (*universalium inspectionum* etc. p.17).

Simon Stevin dans sa *Disme* (a.1585), écrit (p.208)

941 ⓪ 3 ① 0 ② 4 ③ ce que nous écrivons 941·304.

Joost Bürgi (a.1552 ⊢ 1632), selon Keppler, a séparé la partie entière de la partie décimale par un angle droit (voir Mercator §log 1·3), ou par un point.

Le point en haut est d'usage commun dans les traités anglais contemporains. Selon cette notation, on supprime la partie entière, lorsqu'elle est nulle.

> ⊦ ✻ 20. $m,n \varepsilon \mathrm{N}_1 . x,y \varepsilon \mathrm{r\,F}\, 1 \cdots n . a,b \varepsilon \mathrm{R\,F}\, 1 \cdots n .\supset.$

·1 $(\Sigma x^2)(\Sigma y^2) \geqq (\Sigma xy)^2$ [P6·2 .⊃. P]

·2 $n(\Sigma x^2) \gtreqqless (\Sigma x)^2$ [P·1 . $y=1$.⊃. P] { Cauchy a.1821 p.372 }

·3 $(\Sigma ax^2)(\Sigma ay^2) \geqq (\Sigma axy)^2$ [P6·3 .⊃. P]

·4 $(\Sigma a)(\Sigma ax^2) \gtreqqless (\Sigma ax)^2$ [(1 | y)P·3 ⊃ P]

·5 $n^{m-1}(\Sigma a^m) \gtreqqless (\Sigma a)^m$

Num ✻ 21·1 $u \varepsilon \text{Cls} . \text{Num}\,u\, \varepsilon \text{N}_1 . f \varepsilon \text{ r f } u . \supset .$

$\Sigma(f,u) = \iota x \ni [g \varepsilon (u \text{ f } 1 \cdots \text{Num}\,u)\text{rep} . \supset_g . x = \Sigma(fg, 1 \cdots \text{Num}\,u)]$ Df

·2 $u \varepsilon \text{Cls} . f \varepsilon \text{ r f } u . \text{Num}[u \frown x \ni (fx -= 0)] \varepsilon \text{N}_1 . \supset .$

$\Sigma(f,u) = \Sigma[f, u \frown x \ni (hx -= 0)]$ Df

·3 $u \varepsilon \text{Cls'r} . \text{Num}\,u\, \varepsilon \text{N}_1 . \supset .$

$\Sigma u = \iota x \ni [f \varepsilon (u \text{ f } 1 \cdots \text{Num}\,u)\text{rep} . \supset_f . x = \Sigma(f, 1 \cdots \text{Num}\,u)]$ Df

·4 $\text{Hp}·3 . \supset . \Sigma u = \Sigma(\text{idem}, u)$ Dfp

·5 $u \varepsilon \text{Cls'N}_0 . \text{Num}\,u\, \varepsilon \text{N}_1 . f \varepsilon (\text{N}_0 \text{f} u)\text{sim} . \supset . \Sigma(f,u) = \Sigma(f'u)$

La P·1 est la Df de $\Sigma(f,u)$, si u est une classe finie. Cette somme est la valeur constante de $\Sigma(fg, 1 \cdots \text{Num}\,u)$, quel que soit l'ordre g des u.
Ex. : §! 6·5 8 §Φ ·1 §Dtrm ·0.

P·2. « Si la classe u contient un nombre infini d'individus, mais si le nombre des individus de la classe u, auxquels correspond une valeur non nulle de f, est fini, alors $\Sigma(f,u)$ indique la somme des valeurs de la fonction f, lorsque la variable prend dans la classe u les valeurs auxquelles correspond une valeur non nulle de f. » Ex.: §E 2·2 §mp 2·0.

P·3. « Soit u une classe de nombres, en nombre fini. Σu indique leur somme ». Ex.: P22, §! P7·3, §mp 2·5. Voir § lim 10.

✻ 22. $n \varepsilon 2\text{N}_0+1 . \supset . \text{Num}(w,x,y,z) \ni (w,x,y,z \varepsilon 2\text{N}_0+1 . w^2+x^2+y^2+z^2 = 4n) = \Sigma(\text{N}_1 \frown n/\text{N}_1)$

{ Jacobi a.1834 t.6 p.245: « Sit n datus numerus quilibet impar positivus, sint porro w,x,y,z numeri impares positivi, numerus solutionum æquationis $4n = ww+xx+yy+zz$ æquatur summæ factorum ipsius n. » }

§34 Π

× ⋯ ✻ 1·0 $m\varepsilon N_0 . f\varepsilon$ r f $0\cdots(m+1)$.⊃.
$\Pi(f, 0\cdots0) = f0 . \Pi(f, 0\cdots(m+1)) = \Pi(f, 0\cdots m)\times f(m+1)$ Df
Π | Σ) §Σ P1
·7 $m\varepsilon N_0 . f\varepsilon$ r f $0\cdots m$.⊃: $\Pi(f, 0\cdots m) = 0$.=. $0\varepsilon f' 0\cdots m$

↾ ✻ 2·1 Hp 1·0 . $n\varepsilon N_1$.⊃. $\Pi(f↾n, 1\cdots m) = [\Pi(f, 1\cdots m)]↾n$
·2 $n\varepsilon N_1+1$.⊃. $\Pi[(n+1)\cdots 2n] = \Pi[(2x-1)|x, 1\cdots n] \times 2^n$

Num ✻ 3·1 $a\varepsilon N_1$.⊃. $\Pi(N_1 \frown a/N_1)^2 = a↾\text{Num}(N_1\frown a/N_1)$
·2 $m,n\varepsilon N_1$.⊃. Num $(1\cdots m \text{ F } 1\cdots n)$sim $= \Pi[m - 0\cdots(n-1)]$
Les $(1\cdots m$ F $1\cdots n)$sim s'appellent les " arrangements simples n à n des nombres $1\cdots m$" .

Σ ✻ 4·1 $m,n\varepsilon N_1$.⊃.
$(n+2)\Sigma\{[\Pi(r+0\cdots n]|r, 1\cdots m\} = \Pi[m+0\cdots(n+1)]$
{Fermat t.1 p.341 :

« In progressione naturali, quae ab unitate sumit exordium, quilibet numerus [m] in proxime majorem [$(m+1)$] facit duplum sui trianguli [$=2(1+2+..+m)$]; in triangulum proxime majoris, facit triplum suae pyramidis; in pyramidem proxime majoris facit quadruplum sui triangulo-trianguli ; et sic uniformi et generali in infinitum methodo. » }

·2 $u\varepsilon$ (r-ι1) f $1\cdots n$.⊃.
$1 = \Sigma\{u_r/\Pi[(1+u_s)|s, 1\cdots r]|r, 1\cdots n\} + /[\Pi(1+u_s)|s, 1\cdots n]$
{ Nicole ParisM. a.1727 p.257 }

✻ 10. $n\varepsilon N_1+1 . x,y\varepsilon$ R F $1\cdots n . a\varepsilon N_1$ F $1\cdots n$.⊃.
·1 $(\Sigma x)^n \geqq n^n \Pi x$ ·2 $\Sigma x^n \geqq n\Pi x$
·3 $(\Sigma ax)↾(\Sigma a) \geqq [(\Sigma a)↾(\Sigma a)]\, \Pi(x↾a)$
·4 $\Sigma ax^n \geqq n\Pi x^a$
·5 $(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n) > 1+x_1+x_2+\ldots+x_n$
·6 $x\varepsilon R\frown(1-R)$ f $1\cdots n$.⊃. $(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n) > 1-x_1-x_2\ldots-x_n$

§35 ! = (factorielle) C = (combinaisons)

$N_0 + \times$ ✻ 1·0 $0! = 1$: $a \varepsilon N_0 . \supset . (a+1)! = a! \times (a+1)$ Df

·01 $a,b \varepsilon N_0 . \supset . a+b! = a+(b!) . a-b! = a-(b!) .$
$a \times b! = a \times (b!) . a/b! = a/(b!)$ Df

Π ·03 $m \varepsilon N_1 . \supset . m! = \Pi 1 \cdots m$ Dfp

Note. Le signe ! a été introduit par Kramp, *Éléments d'Arithm.* a. 1808. Gauss a indiqué la même fonction par Πm ; les anglais écrivent $\underline{m|}$.

·1 $a,b \varepsilon N_1 . \supset . \Pi(a+1 \cdots b) \varepsilon N_1 \times b!$ { B. PASCAL t.3 p.274:
« Omnis productus a quotlibet numeris continuis est multiplex producti a totidem numeris continuis quorum primus est unitas.» }

·11 $a,b \varepsilon N_1 . \supset . (a+b)! \varepsilon N_1 \times (a!)(b!)$ [= P·1]

✻ 2. $a \varepsilon r . n \varepsilon N_1 . \supset .$ ·0 $C(a,0) = 1$ Df

·01 $C(a,n) = \Pi[a - 0 \cdots (n-1)] / n!$ Df

·1 $n \varepsilon N_0 . m \varepsilon n + N_0 . \supset . C(m,n) = m! / [n!(m-n)!]$ Dfp

Note. La fonction $C(m,n)$, ou $C_{m,n}$, qu'on peut lire « nombre des combinaisons de m objets, pris n à n » (Pascal), se rencontre aussi sous les formes $\left[\frac{m}{n}\right]$ (Euler), $(m)_n$ (Cauchy), $\binom{m}{n}$ (Raabe), m_n, etc.

·2 $C(-a, n) = (-1)^n C(a+n-1, n)$ { EULER PetrA. a.1784 p.86 }

✻ 3. $m,n \varepsilon N_0 . \supset .$ ·1 $C(m,0) = 1 . C(m,1) = m . C(m,m) = 1$
$C(0, n+1) = 0 . C(m, m+n+1) = 0$

·2 $C(m+n, m) = C(m+n, n)$ { PASCAL t.3 p.289:
« I. Duo quilibet numeri æque combinantur in eo quod amborum aggregatum est. » }

·21 $C(m+1, n+1) = C(m, n+1) + C(m,n)$

Note. Cette P, avec les $C(m,0) = 1$, $C(0, m+1) = 0$, permet de définir par *induction double*, la fonction C.

·3 $C(m+n+1, n) = C(m+n, n) \times (m+n+1)/(m+1)$
$C(m+n, n+1) = C(m+n, n) \times m/(n+1)$
$C(m+n+1, n+1) = C(m+n, n) (m+n+1)/(n+1)$
{ PASCAL t.3 p.289 }

Num ✻ 4. $m,n \varepsilon N_1 . \supset .$

·0 $\text{Num}(1\cdots m \text{ F } 1\cdots m)\text{rcp} = m!$ Dfp

Les $(1\cdots m \text{ F } 1\cdots m)\text{rcp}$ s'appellent les " permutations des nombres $1\cdots m$ ".

·1 $\text{Num}[\text{Cls}'1\cdots m \frown x\ni(\text{Num}x = n)] = C(m,n)$ Dfp

·2 $\text{Num}[(N_0 \text{ F } 1\cdots m) \frown x\ni(\Sigma x = n)] = C(m+n-1, n)$

{ Frénicle ParisM. a.1693 t.5 (p.101 de l'éd. de 1729) }

Les objets dont on prend ici le nombre, s'appellent « combinaisons avec répétition des nombres $1\cdots m$, n à n ».

Σ ✻ 5·1 $m\varepsilon N_1 . a\varepsilon N_1 F(1\cdots m) . \supset . (\Sigma a)! \varepsilon N_1 \times \Pi(a!)$

·2 $n\varepsilon N_1 . \supset . \Sigma\{r!r \,|r, 1\cdots n\} = (n+1)!-1$

·3 —— $. \supset . \Sigma\{r/(r+1)! \,|r, 1\cdots n\} = /(n+1)!$

✻ 6. $m,n\varepsilon N_1 . \supset .$

·1 $\Sigma[C(m+r, r)|r, 0\cdots n] = \Sigma[C(m+r, m)|r, 0\cdots n] = C(m+n+1,n)$

{ Tartaglia a.1523 ; *General trattato* etc. a.1556 t.2 p.17:

« . . . la prima progressione viene ad essere un'unità per termine in questa forma 1 . 1 . 1 . 1 . 1 . 1 . . . .

. . . . l'ultimo termine di ciascuna di dette progressioni viene ad esser la summa della anciana progressione... »}

·2 $k\varepsilon N_0 . \supset . C(m+n, k) = \Sigma[C(m,r)\times C(n, k-r) \,|r, 0\cdots k]$

·3 $m,n\varepsilon r . k\varepsilon N_0 . \supset .$ Ths ·3

·4 $\Sigma[C(m,r)|r, 0\cdots m] = \Sigma(C, m ; 0\cdots m) = 2^m$

{ Herigone a.1644 t.2 p.122:

« Trouuer l'aggregé de conionctions faites en toutes manieres.

Soit faite une progression en raison double commençant à l'unité, qui aye autant de termes qu'il y a de choses proposées, et de la somme de tous les termes soit soustrait le nombre des choses, le reste donnera le requis. »}

·5 $\Sigma\{C(m,s)|s, (0\cdots m)\frown(2N_0)\} = \Sigma\{C(m,s)|s, (0\cdots m)\frown(2N_0+1)\} = 2^{m-1}$

{ Jac. Bernoulli a.1713 p.104}

✻ 7. $a,b,c\varepsilon r . m,n\varepsilon N_1 . \supset .$

·1 $(a+b)^m = \Sigma\{[C(m,r)a^{m-r}b^r] \,|r, 0\cdots m\}$

La P·1 exprime la « formule du binôme ». Si par $C(m,n)$ on désigne les coefficients du binôme, elle est une identité. Tartaglia a indiqué comment on peut calculer ces coefficients ; voir §Ɲ 2·1.

·2 $(a+b)^m = \Sigma\{[C(m,r)\,(a+rc)^{m-r}b(b-rc)^{r-1}] \,|r, 0\cdots m\}$

{ Abel a.1826 t.1 p.102 }

·3 $(m+1)\Sigma(1\cdots n)^m =$
$(n+1)^{m+1}-1-\Sigma\{C(m+1,r)\times\Sigma(1\cdots n)^r \mid r, 0\cdots(m-1)\}$
[$\Sigma\{C(m+1,r)\times\Sigma(1\cdots n)^r \mid r, 0\cdots(m-1)\} =$
$\Sigma\{\Sigma[C(m+1,r)s^r \mid r, 0\cdots(m-1)] \mid s, 1\cdots n\} =$
$\Sigma\{[(1+s)^{m+1}-(m+1)s^m-s^{m+1}] \mid s, 1\cdots n\} =$
$(n+1)^{m+1}-1-(m+1)\Sigma(1\cdots n)^m$]
{ PASCAL a.1655 t.3 p.309 {

·4 $\Sigma\{[C(n,r)]^2 \mid r, 0\cdots n\} = C(2n,n)$ { LAGRANGE a.1770 t.2 p.182:
$1+n^2+[n(n-1)/2]^2+\ldots=[1\times3\times5\ldots(2n-1)/(1\times2\times3\ldots\times n)]2^n$ {

·5 $\Sigma\{(-1)^r[C(2n,r)]^2 \mid r, 0\cdots 2n\} = C(2n,n)$ {LUCAS a.1891 p.133{

·51 $\Sigma\{(-1)^r[C(2n,r)]^3 \mid r, 0\cdots 2n\} = (-1)^n(3n)!/(n!)^3$
$= (-1)^n C(3n,n)\times C(2n,n)$
{ DIXON Mm. a.1890 t.20 p.79 {

·52 $a,n\varepsilon N_1 .\supset. \Sigma\{[C(n,r)]^{2a} \mid r, 0\cdots n\}\ \varepsilon\ (n+1)\times N_1$
{ VIVANTI Zm. a.1888 t.33 p.358 {

·6 $(1+x+x^2)^m = \Sigma\{(x^{m-r}+x^{m+r})\times\Sigma[C(m, r+2s)\times C(r+2s, s)$
$\mid s, 0\cdots m] \mid r, 1\cdots m\} + x^m\times\Sigma\{C(m, 2s)\times C(2s, s) \mid s, 0\cdots m\}$
{ EULER a.1778 PetrNA. a.1794 t.12 p.47 {

·7 $n! = \Sigma\{(-1)^r C(n,r)(n-r)^n \mid r, 0\cdots n\}$
{ EULER PetrNC. a.1768 t.13 p.28 {

·8 $\Sigma(1\cdots n) = \Sigma[(-1)^{r-1}C(n,r)\,r \mid r, 1\cdots n]$
{ JOH. BERNOULLI a.1740 CorrM. t.2 p.35 {

* 8. $m,n\varepsilon N_1 . a\varepsilon\, rF1\cdots m .\supset. (\Sigma a)^n =$
$\Sigma\{[n!/\Pi(u!, 1\cdots m)]\times\Pi(a_r \mathbin{\upharpoonright} u_r \mid r, 1\cdots m) \mid u, (N_0F\,1\cdots m)\frown u\ni(\Sigma u = n)\}$
{ LEIBNIZ a.1678 ? ; voir Mss. *Math.* III A 3 fol.16;
MathS. t.3 p.175,192; t.5 p.380; t.7 p.178 {
{ BERNOULLI Joh. a.1695. (LEIBNIZ *MathS.* t.3 p.181):
Esto... polynomium quodcunque $s+x+y+z$ etc. elevandum ad potentiam quamcunque r; Dico coefficientem termini $s^a\, x^b\, y^c\, z^e$ etc. fore
$$\frac{r\,.\,r-1\,.\,r-2\,.\,r-3\,.\,r-4\,.\ .\ .\ .\,1}{1.2.3\ldots a\times1.2.3\ldots b\times1.2.3\ldots c\times1.2.3\ldots e\ \&}\ ,$$ {

* 9·1 $m\varepsilon N_1 . a\varepsilon\, R\,F\,1\cdots m .\supset.$
$\Sigma\{(\Pi r)\times(\Sigma r\times a)^m \mid r, (\iota1\cup\iota-1)F(1\cdots m)\} = 2^m\times m!\times\Pi a$
{ GERGONNE Ann. a.1816-17 t.7 p.165 {

* 10·1 $m\varepsilon N_1 . u\varepsilon\, RF\,1\cdots m .\supset.$
$(1+u_1)(1+u_2)\ldots(1+u_m) < 1+(\Sigma u)/1!+(\Sigma u)^2/2!+\ldots+(\Sigma u)^m/m!$
{ PRINGSHEIM MA. a.1889 t.33 p.142 {

Continuation: §Np 9 §D 6·3·6 §S 6·6·7 §e 5·21.

§36 mod sgn

n ✻ 1. $a \varepsilon \mathrm{N}_1 . \supset .$

·0 $\mathrm{mod}(+a) = a \,.\, \mathrm{mod}(-a) = a \,.\, \mathrm{mod}0 = 0$ Df

Note. La fonction «mod$a$» (module de a) se rencontre sous la forme «mol$a$» (moles a) dans Leibniz, *MathS.* t.7. p.219;

sous la forme que nous adoptons dans Argand a.1814 *Ann. de Gergonne* t.5 p.208, et dans Cauchy, *Exercices* a.1829 t.4 p.47.

Le mot « mod » se rencontre déjà dans Gauss a.1801, pour les congruences. Il a d'autres significations dans la théorie des fonctions elliptiques. Par cette raison Weierstrass a.1856 t.1 p.302, a proposé de l'appeler « absolute Betrag », et a.1876 t.2 p.78 l'a indiqué par $|a|$. Cette notation est contraire aux conventions sur les fonctions, §f; le signe « mod » n'apporte pas ici des ambiguïtés.

$a,b \varepsilon \mathrm{n} . \supset .$ ·1 $\mathrm{mod}a = \imath\, \mathrm{N}_0 \frown x \ni (a = +x \,.\cup.\, a = -x)$ Dfp

·2 $\mathrm{mod}a \,\varepsilon\, \mathrm{N}_0$ ·3 $\mathrm{mod}(-a) = \mathrm{mod}a$

·4 $\mathrm{mod}(a+b) \leqq \mathrm{mod}a + \mathrm{mod}b$

$\times$ ·5 $\mathrm{mod}(a \times b) = (\mathrm{mod}a) \times (\mathrm{mod}b)$

r ✻ $2{\cdot}0\text{-}{\cdot}5 = (\mathrm{R}, \mathrm{R}_0, \mathrm{r}) | (\mathrm{N}_1, \mathrm{N}_0, \mathrm{n})\, \mathrm{P}1{\cdot}0\text{-}{\cdot}5$

$a,b \varepsilon \mathrm{r} . \supset :$ ·6 $a -= 0 . \supset . \mathrm{mod}/a = /\mathrm{mod}a$

$\upharpoonright$ ·7 $m \varepsilon \mathrm{N}_0 . \supset . (\mathrm{mod}a)^m = \mathrm{mod}(a^m)$ ·8 $m \varepsilon \mathrm{n} \,.\, a -= 0 . \supset .$ ThsP·7

·9 $\mathrm{mod}a = \mathrm{mod}b \,.=.\, a^2 = b^2$ { Leibniz *ibid.*: « Quantitates duae diversae, eandem molem habentes semper habent idem quadratum. » }

$\Sigma\ \Pi$ ✻ 3. $m \varepsilon \mathrm{N}_1 \,.\, f \varepsilon\, \mathrm{rF}(1 \cdots m) . \supset .$

·1 $\mathrm{mod}\Sigma f \leqq \Sigma \mathrm{mod}f$ ·2 $\mathrm{mod}\Pi f = \Pi \mathrm{mod}f$

✻ 4·0 $a \varepsilon \mathrm{R} . \supset . \mathrm{sgn}a = 1 \,.\, \mathrm{sgn}(-a) = -1 \,.\, \mathrm{sgn}0 = 0$ Df

Cette notation « signum a » a été introduite par Kronecker *Werke*, t.2 p.39

$a,b \varepsilon \mathrm{r} . \supset .$ ·1 $\mathrm{sgn}a \,\varepsilon\, \iota 1 \cup \iota 0 \cup \iota(-1)$ ·11 $\mathrm{sgn}(-a) = -\mathrm{sgn}a$

·2 $\mathrm{sgn}(a \times b) = \mathrm{sgn}a \times \mathrm{sgn}b$ ·3 $a = \mathrm{sgn}a \times \mathrm{mod}a$

·4 $\mathrm{sgn}a = \mathrm{sgn}b . \supset . \mathrm{sgn}(a+b) = \mathrm{sgn}a$

·5 $\mathrm{sgn}(a+b) = \mathrm{sgn}a \,.=.\, \mathrm{sgn}a = \mathrm{sgn}b \,.\cup.\, \mathrm{mod}a > \mathrm{mod}b$

·6 $a,b -\varepsilon\, \iota 0 . \supset : \mathrm{sgn}a = \mathrm{sgn}b \,.=.\, \mathrm{sgn}(ab) = 1 \,.=.\, \mathrm{sgn}(a/b) = 1$

·7 $a -= 0 . \supset . \mathrm{sgn}(/a) = \mathrm{sgn}a$

·8 ——— . $m \varepsilon \mathrm{n} . \supset . \mathrm{sgn}\, a^{2m} = 1 \,.\, \mathrm{sgn}\, a^{2m+1} = \mathrm{sgn}a$

Continuation : §β P2·6, §Q P80, §λ P1·0, §Lm 4·0, §lim P18, P24, §cont P1·01, §qn P3, P41, §Subst P3, §vct P9·2, P15.

§40 max min

$>$ ✱ 1. $u,v\varepsilon\, \mathrm{Cls}'N_0 \,.\, a,b\varepsilon N_0 \,.\supset.$

·0 $\max u = \iota\, u \cap x\ni(y\varepsilon\, u-\iota x \,.\supset_y .\, x>y)$ Df

max$u$ = « le plus grand (maximum) des u ».
min$u$ = « le plus petit (minimum) des u ».

·1 $\max \iota a = a$ ·11 $a>b \,.\supset.\, \max(\iota a \cup \iota b) = a$

·2 $\exists u \,.\, m\varepsilon N_0 \,.\, -\exists\, u\cap(m+N_0) \,.\supset.\, \exists\, \iota \max u$

$\exists\, \iota \max u \,.\, \exists\, \iota \max v \,.\supset.$ ·3 $\max(u\cup v) = \max(\iota \max u \cup \iota \max v)$

·4 $\max(u+v) = (\max u)+(\max v)$

·5 $\max(u\times v) = (\max u)\times(\max v)$

·6 $\max(u\uparrow v) = (\max u)\uparrow(\max v)$

n ✱ 2. $u,v\varepsilon\, \mathrm{Cls}'\mathrm{n} \,.\, a,b\varepsilon \mathrm{n} \,.\supset.$ P1·0-·4

R ✱ 3. $u,v\varepsilon\, \mathrm{Cls}'\mathrm{R} \,.\, a,b\varepsilon \mathrm{R} \,.\supset.$ P1·0-·1,·3-·5

·2 $\mathrm{Num}u\, \varepsilon N_1 \,.\supset.\, \exists\, \iota \max u$

·6 $u\varepsilon\, \mathrm{Cls}'(1+\mathrm{R}) \,.\, v\varepsilon\, \mathrm{Cls}'N_0 \,.\, \exists\, \iota \max u \,.\, \exists\, \iota \max v \,.\supset.$ P1·6

r ✱ 4. (r | R)P3·0-·4

✱ 11-14. (min, $>$)|(max, $<$)P1·0-·1,·3-·6 . P2·0-·1,·3-·4 . P3 . P4

11·2 $u\varepsilon\, \mathrm{Cls}'N_0 \,.\, \exists u \,.\supset.\, \exists\, \iota \min u$

12·2 $u\varepsilon\, \mathrm{Cls}'\mathrm{n} \,.\, \exists u \,.\, m\varepsilon N_0 \,.\, -\exists\, u\cap(m-N_0) \,.\supset.\, \exists\, \iota \min u$

·5 $u\varepsilon\, \mathrm{Cls}'\mathrm{n} \,.\, \exists\, \iota \max u \,.\supset.\, \min(-u) = -\max u$

13·7 $u\varepsilon\, \mathrm{Cls}'\mathrm{R} \,.$ ———— $.\supset.\, \min /u = /\max u$

✱ 15 $u\varepsilon\, \mathrm{Cls}'N_1 \,.\, n\varepsilon N_1 \,.\supset.$

·1 $\min_1 u = \min u \,.\, \min_{n+1} u = \min[u\cap x\ni(x>\min_n u)]$ Df

min$_n$ u indique donc le $n^{ième}$ nombre de la classe u, en les disposant dans l'ordre croissant. Ex. §Dtrm P3.

·2 $a\varepsilon N_1 \,.\, m\varepsilon\, N_1+1 \,.\, \mathrm{Num}\, N_1\cap(a/N_1) = m \,.\, r\varepsilon\, 1\cdots m \,.\supset.$
$\min_r(N_1\cap a/N_1)\times\min_{m-r}(N_1\cap a/N_1) = a$

Continuation : §quot, §Dvr, §mlt, §Np 10, §mp, §Q82 83, §cres ·8, §cont 2·3, §D 4·1

§41 quot rest

$N_0 \times >$ max ❋ 1. $a,b \varepsilon N_0 . c,d \varepsilon N_1 . \supset$:

·0 $\text{quot}(a,c) = \max[N_0 \cap x \ni (xc \leqq a)]$ Df

quot(a,c) et rest(a,c) sont le quotient et le rest de la division de a par c. Le dividende est a, le diviseur est b. Le cas de $a=0$ se rencontre p. ex. §Dtrm 8·1. On peut remplacer les signes quot et rest par les signes E et β qui suivent.

·1 $\text{quot}(0,c) = 0 . \text{quot}(c,c) = 1 . \text{quot}(a,1) = a . \text{quot}(ac,c) = a$

·2 $\text{quot}(ad, cd) = \text{quot}(a,c)$ ·3 $\text{quot}(a, cd) = \text{quot}[\text{quot}(a,c),d]$

·4 $a < c .=. \text{quot}(a,c) = 0 : a \gtreqless c .=. \text{quot}(a,c) \varepsilon N_1$

·5 $a > b . \supset . \text{quot}(a,c) \gtreqless \text{quot}(b,c)$

·51 $c > d . \supset . \text{quot}(a,c) \leqq \text{quot}(a,d)$

·6 $\text{quot}(a+b, c) \gtreqless \text{quot}(a,c) + \text{quot}(b,c)$

·7 $\text{quot}(ac+b, c) = a + \text{quot}(b, c)$

rest ❋ 2. Hp P·1 $. \supset .$

·0 $\text{rest}(a,c) = a - c \times \text{quot}(a,c)$ Df

·01 $\text{rest}(0,c) = 0 . \text{rest}(c,c) = 0$ ·02 $\text{rest}[\text{rest}(a,c), c] = \text{rest}(a,c)$

$+$ ·1 $\text{rest}(a+c, c) = \text{rest}(a,c)$

·11 $\text{rest}(a+b, c) = \text{rest}[b + \text{rest}(a,c), c]$

·12 $\text{rest}(a+b, c) = \text{rest}[\text{rest}(a,c) + \text{rest}(b,c), c]$

·13 $\text{rest}(a,c) = \text{rest}(b,c) .=. \text{rest}(a+d, c) = \text{rest}(b+d, c)$

$>$ ·14 $a < c . \supset . \text{rest}(a,c) = a$ ·15 $a > c . \supset . a > 2\,\text{rest}(a,c)$

$\times$ ·2 $\text{rest}(ad, cd) = d \times \text{rest}(a,c)$ ·21 $a \varepsilon N_0 \times c .=. \text{rest}(a,c) = 0$

·22 $\text{rest}(ab, c) = \text{rest}[\text{rest}(a,c) \times \text{rest}(b,c), c]$

·23 $\text{rest}(a,c) = \text{rest}(b,c) . \supset . \text{rest}(ad,c) = \text{rest}(bd,c)$

·24 $\text{rest}(a+bc, c) = \text{rest}(a,c)$

·25 $\text{rest}(a+b, c) = \text{rest}(b,c) . \supset . a \varepsilon N_0 \times c$

·26 $\text{rest}(a,c) + \text{rest}(b,c) \varepsilon N_1 \times c . \supset . a+b \varepsilon N_1 \times c$

$\uparrow$ ·3 $\text{rest}(a^3, 6) = \text{rest}(a, 6) . \text{rest}(a^2, 4) \varepsilon \iota 0 \cup \iota 1$

·31 $m \varepsilon N_1 . \supset . \text{rest}[(a+c)^m, c] = \text{rest}(a^m, c)$

$\cdots$ ·5 $\text{rest}(a,c) \varepsilon 0 \cdots (c-1)$

Σ ·6 $x \varepsilon N_1 F 1 \cdots m . \supset . \text{rest}(\Sigma x, c) = \text{rest}[\Sigma\, \text{rest}(x,c), c]$

·7 $x \varepsilon N_1 F 1 \cdots m . \supset . \text{rest}(\Pi x, c) = \text{rest}[\Pi\, \text{rest}(x,c), c]$

quot rest ✻ 3.

·1 $q, r \varepsilon N_0 . a = cq + r . r < c . \supset . q = \text{quot}(a,c) . r = \text{rest}(a,c)$

·2 $\text{quot}[\text{rest}(a,c), c] = 0 . \text{quot}[\text{rest}(a, cd), c] = \text{rest}[\text{quot}(a,c), d]$

·3 $\text{rest}(a,c) + c \times \text{rest}[\text{quot}(a,c), d] = \text{rest}(a, cd)$

·4 $a \geqq c . \text{quot}(a,c) - \varepsilon\, d \times N_1 . \supset :$
$\text{rest}(a, cd) > \text{rest}(a,c) . \text{rest}(a, cd) - \text{rest}(a,c)\, \varepsilon\, c \times N_1$

·5 $\text{quot}(a+b, c) = \text{quot}(a,c) + \text{quot}\,[b + \text{rest}(a,c), c]$

·6 $\text{quot}(a,c) = \text{quot}(a, c+d) .=. \text{rest}(a,c) \geqq [\text{quot}(a,c)] \times d$

·7 $c > d . \supset : \text{quot}(a,c) = \text{quot}(a, c-d) .=.$
$c - \text{rest}(a,c) > [\text{quot}(a,c)+1] \times d$

·8 $\text{quot}(a,c) = \text{quot}(a+b, c+b) .=. \text{rest}(a,c) \geqq [\text{quot}(a,c) - 1] \times b$

·9 $\max N_1 \frown x \ni \{\text{quot}(a+x,c) = \text{quot}(a,c)\} = c - \text{rest}(a,c) - 1$

§42 E = (Entier de) β = (partie fractionnaire de)

r ✻ 1·0 $x \varepsilon r . \supset . Ex = \iota\, n \frown z \ni (z \leqq x < z+1)$ Df

Note. La notation Ex a été introduite par Legendre, *Théorie des nombres*, II édition p.8 a.1808. La notation de Gauss a.1808 t.2 p.5, est $[x]$.

·1 $x \varepsilon r . \supset . Ex\, \varepsilon\, n . Ex \leqq x < Ex + 1 . EEx = Ex$

·2 $x \varepsilon n . \supset . Ex = x$

+ ·3 $x, y \varepsilon r . \supset : E(x+y) \geqq Ex + Ey : x > y . \supset . Ex \geqq Ey$

— ·4 $x \varepsilon r - n . \supset . Ex + E(-x) = -1$
$x \varepsilon n . \supset . Ex + E(-x) = 0$

× ·5 $E\,xy = E(xy)$ Df

/ ·6 $x \varepsilon R . \supset . E[(Ex)/x] - 1 = Ex + E(-x)$

·7 $x \varepsilon R . a \varepsilon N_1 . \supset . E(x/a) = E\{(Ex)/a\}$

Σ ✻ 2·0 $x \varepsilon R . a \varepsilon N_1 . \supset . \Sigma\{[E(x + r/a)] | r, 0 \cdots (a-1)\} = E\,ax$
{ Bertrand *Arithmétique* a.1851 p.109 }

·1 $x \varepsilon r . a \varepsilon N_1 . - \exists\, [x \times (1 \cdots a)] \frown n . \supset .$
$\Sigma\{(E\, rx) | r, 1 \cdots a\} + \Sigma\{[E(r/x)] | r, 1 \cdots E\,ax\} = a\, E\, ax$
{ Gauss a.1808 t.2 p.7 }

·2 $x \varepsilon r . \supset . Ex = \Sigma\{[E(x/2^r + /2)] | r, N_1\}$
$\text{————} = E(x/2 + /2) + E(x/4 + /2) + \ldots$
{ Cesàro *Excursions Arithm.* a.1885 p.36 }

max ·3 $x\varepsilon\text{r} .\supset. \text{E}x = \max[\text{n} \frown y\ni(y\leqq x)]$ Dfp

quot ·4 $a,b\varepsilon\text{N}_1 .\supset. \text{quot}(a,b) = \text{E}(a/b)$ Dfp

E ✻ 3. $x,y\varepsilon\text{r} .\supset.$ ·0 $\beta x = x - \text{E}x$ Df

·01 $\beta\beta x = \beta x \;.\; \text{E}\beta x = 0 \;.\; \beta\text{E}x = 0$

Zehfuss (Grunert Archiv, a.1850 t.27 p.12) a introduit cette fonction βx; la lettre β est l'initiale du mot « Bruchtheil ». Elle a été indiquée dans F1898 par Θx. On l'appelle aussi « mantisse », c'est-à-dire « excédent ». Wallis, Opera a.1693 p.41 : « Ejusque partes decimales abscissas, *appendicem* voco, sive *mantissam* ».

·1 $y\varepsilon\text{n} .\supset. \beta(x+y) = \beta x$

·11 $\beta(x+y) = \beta(\beta x + \beta y)$

·2 $x\varepsilon\text{n} .\supset. \beta x + \beta(-x) = 0$

·21 $x \mathrel{-\varepsilon} \text{n} .\supset. \beta x + \beta(-x) = 1$

·3 $0 \leqq \beta x < 1$

·31 $\beta(x+y) \leqq \beta x + \beta y$

·4 $y\varepsilon\text{n} .\supset. \beta(xy) = \beta(y\beta x)$

·5 $a\varepsilon\text{N}_1 .\supset. \text{E}\,ax = a\times\text{E}x + \text{E}(a\beta x)$

·6 $/2 - \text{mod}(\beta x - /2) = \min \text{mod}(x - \text{n}) = \text{mod}(x + \text{E}x - \text{E}2x)$

rest ·7 $a,b\varepsilon\text{N}_1 .\supset. \text{rest}(a,b) = b\times\beta(a/b)$ Dfp

Continuation §Q 84, §e 3.

§43 Chf = (chiffre)

E β ❋ $x \varepsilon \mathrm{R} \;.\supset:$

$$\mathrm{Chf}x = \mathrm{E}\mathrm{X}\beta\mathrm{X}^{-1}x = \mathrm{X}\beta\mathrm{X}^{-1}\mathrm{E}x = \mathrm{E}x - \mathrm{X}\mathrm{E}\mathrm{X}^{-1}x = \mathrm{rest}(\mathrm{E}x,\mathrm{X}) \quad \mathrm{Df}$$

Note. « Chf$x$ » qu'on peut lire « le chiffre de x », représente le chiffre des unités de x, dans la base X, que nous lisons *dix*. En conséquence, Chf($\mathrm{X}^n x$) signifie « le chiffre qui suit de n places le chiffre des unités.

Le symbole «Chf» est tiré du français; car «cyphra» signifie 0 (Euler).

·1 $\mathrm{Chf}x \;\varepsilon\; 0\cdots9$ $\qquad$ $\mathrm{Chf}\,'\mathrm{N}_1^{\,2} = \iota0 \cup \iota1 \cup \iota4 \cup \iota5 \cup \iota6 \cup \iota9$

$a \varepsilon (2\mathrm{N}_1)-(5\mathrm{N}_1) \;.\supset.\; \mathrm{Chf}\,a^4 = 6$ $\qquad$ $a \varepsilon \mathrm{N}_1-(2\mathrm{N}_1)-(5\mathrm{N}_1) \;.\supset.\; \mathrm{Chf}\,a^4 = 1$

·2 $a,b \varepsilon \mathrm{N}_1 \;.\supset:$

$a \varepsilon 2\mathrm{N}_0 \;.=.\; \mathrm{Chf}a \;\varepsilon\; 2\mathrm{N}_0 \;:\; a \varepsilon 5\mathrm{N}_0 \;.=.\; \mathrm{Chf}a \;\varepsilon\; 5\mathrm{N}_0$

$a \varepsilon 3\mathrm{N}_0 \;.=.\; \Sigma[(\mathrm{Chf}\,\mathrm{X}^{-r}a) \,|\, r, \mathrm{N}_0] \;\varepsilon\; 3\mathrm{N}_0$

» 9 » » » 9

$a \varepsilon b\times\mathrm{N}_1 \;.=.\; \Sigma[(\mathrm{Chf}\,\mathrm{X}^{-r}a) \times \mathrm{rest}(\mathrm{X}^r,b) \,|\, r, \mathrm{N}_0] \;\varepsilon\; b\times\mathrm{N}_0$

{ Pascal a.1654 t.3 p.312 }

Ces formules expriment les " caractères de divisibilité des nombres ".

·3 $a,n \varepsilon \mathrm{N}_1 \;.\supset:\; \mathrm{Chf}\,a^5 = \mathrm{Chf}\,a \;.\; \mathrm{Chf}\,a^{n+4} = \mathrm{Chf}\,a^n$

$\mathrm{Chf}\,a^2 = 6 \;.=.\; \mathrm{Chf}\,\mathrm{X}^{-1}a^2 \;\varepsilon\; 2\mathrm{N}_0+1$

$m \varepsilon (4\mathrm{N}_0)\cup(4\mathrm{N}_0+1) \;.\supset.\; \mathrm{Chf}\,\mathrm{X}^{-1}7^m = 0$

$m \varepsilon (4\mathrm{N}_0+2)\cup(4\mathrm{N}_0+3) \;.\supset.$ » » 4

·4 $\exists(m,n) \ni [m,n \varepsilon \mathrm{N}_1 : p \varepsilon m+\mathrm{N}_1 \;.\supset_p.\; \mathrm{Chf}(\mathrm{X}^p x) = \mathrm{Chf}(\mathrm{X}^{p+n}x)]$

{ Wallis a.1685 t.2 p.364 :

« ... post processum (Reductionis Fractionum vulgarium ad Decimales) aliquatenus continuatum, redeunt iidem numeri, et eodem ordine circulantur quo prius... semper, si non citius, post tot locos uno minus quot sunt in Divisore unitates ». }

Sibt-el Mâridini a.1500 (BM. a.1899 t.13 p.33) a rencontré quelques fractions sexagésimales périodiques. Wallis a.1657 (t.1 p.224) a calculé quelques fractions décimales périodiques; mais il a énoncé les principaux théorèmes seulement dans l'ouvrage de l'a.1685.

Continuation : §lim P26.

§44 Dvr

N_1 × max ✻ 1. $u,v \varepsilon$ Cls'N_1 . $a,b,c,d \varepsilon N_1$.⊃.

·0 Dvr$u$ = Du = max[N_1⌒xɜ(u⊃N_1×x)] Df

{ » = (le plus grand commun diviseur des u)}

Les notations D(a,b) et m(a,b) qu'on rencontre dans Lebesgue, a.1859 p.8, ont été adoptées par Lucas, et par d'autres.

Nous les emploierons dans ces deux §; mais dans la suite nous adopterons les notations plus claires, bien que plus longues, Dvr et mlt.

·01 $n \varepsilon N_1+1$. $x \varepsilon N_1$F 1⋯n .⊃. Dx = D(x'1⋯n) Df

Ex.: P·22, §mlt P1·5·6

·02 D(a,b) = D(ιa ∪ ιb) Dfp

·1 Dιa = a . D(a,a) = a . D(1,a) = 1 . D(a,b) = D(b,a)

·11 $a \varepsilon N_1$×b .⊃. D(a,b) = b

·12 $a,b \varepsilon N_1$×c .⊃. D(a,b) εN_1×c {Euclides vii P2: « ἐὰν ἀριθμὸς δύο ἀριθμοὺς μετρῇ, καὶ τό μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον μετρήσει » }

·13 D(ac, bc) = c×D(a,b) ·131 D(a,b) = 1 .⊃. D(ac, bc) = c

·14 $ab \varepsilon N_1$×c . D(a,c) = 1 .⊃. $b \varepsilon N_1$×c

·15 D(a, b×c) = D[a, b×D(a,c)]

·16 D(a,c) = 1 .⊃. D(ab,c) = D(b,c)

·17 D(a,b) = 1 . $a \varepsilon N_1$×c .⊃. D(b,c) = 1 {Euclides vii P23}

·18 D(a,c) = 1 . D(b,c) = 1 .=. D(ab,c) = 1 {Euclides vii P24}

·19 D(a,c) = D(b,c) = D(a,d) = D(b,d) = 1 .⊃. D(ab, cd) = 1 {Euclides vii P26}

·20 $a \varepsilon N_1$×b . $a \varepsilon N_1$×c . D(b,c) = 1 .⊃. $a \varepsilon N_1$×bc

·21 D(b,c) = 1 .⊃. D(a, b×c) = D(a,b)×D(a,c)

·22 D(a,b,c) = D[D(a,b), c] {Euclides vii P3}

ꓱu .⊃. ·3 Du εN_1

[$u \varepsilon$ Cls'N_1 . v = N_1⌒xɜ(u⊃N_1×x) .⊃. 1εv . §ꓱ P1·1 .⊃. ꓱv (1)

Hp(1) . $m \varepsilon u$.⊃. −ꓱ v⌒(m+N_1) . (1) . §max P1·2 .⊃. ꓱ ι max$v$ (2)

(1) . (2) . Elim m . Elim v .⊃. P]

·31 u⊃N_1×a .⊃. Du εN_1×a ·32 D(u×a) = a×Du

ꓱu . ꓱv .⊃. ·33 D(u∪v) = D(Du, Dv)

·34 D(u×v) = (Du)×(Dv) {Stieltjes a.1895 p.4}

$*$ 2. $a,b,c,d,m,n\,\varepsilon\,N_1 .\supset:$

$+$ ·11 $D(a+b,\, b) = D(a,b)$ { Euclides vii P1 }

[§$\times$ P2·2·3 $.\supset.$ $\max[\,N_1 \cap x \ni (a,b\,\varepsilon\, N_1\times x)] = \max[N_1 \cap x\ni(a+b,\, b\,\varepsilon\, N_1\times x)]$ $.\supset.$ P]

·12 $D(a,\, a+1) = 1$ [P·41 $.\supset.$ $D(a,\, a+1) = D(a,1)$. P·1 $.\supset.$ P]

·13 $D(a+bc,\, b) = D(a,b)$

·14 $D(a,b) = 1 \,.\, D(b,m) = 1 \,.\, D(a,n) = 1 \;.\supset.\; D(ab,\, am+bn) = 1$

·15 $D(a,b) = 1 \;.\supset.\; D(a+b,\, ab) = 1$

·16 $a>b \,.\, D(a,b) = 1 \;.\supset.\; D(a-b,\, ab) = 1$

·17 $D(a,b) = D(a+bm,\, a+bm+b) = D(a+bm,\, a+bm-b)$

$-$ ·21 $D(2a-1,\, 2a+1) = 1$

·22 $a\,\varepsilon\, 2N_1 \,.\, b\,\varepsilon\, 2N_1+1 \,.\, a>b \;.\supset.\; D(a+b,\, a-b) = D(a,b)$

·23 $a\,,\, b\,\varepsilon\, 2N_1+1$. ——— $.\supset.$ —————— $= 2D(a,b)$

·24 $a>b \,.\, D(a,b) = 1 \;.\supset.\; D(a+b,\, a-b) = \iota 1 \cup \iota 2$

$/$ ·3 $D(a,b) = D(c,d) = 1 \,.\, a/b = c/d \;.\supset.\; a=c \,.\, b=d$

·31 $a/b = c/d \,.\, D(a,b) = 1 \;.\supset.\; c/a = d/b = D(c,d)$

{ ·3·31 Euclides vii P20,21 }

·32 $D[a/D(a,b)\,,\, b/D(a,b)\,] = 1$

·33 $a,b,c\,\varepsilon\, 2N_0+1 \;.\supset.\; D(a,b,c) = D[\,(a+b)/2,\, (a+c)/2,\, (b+c)/2]$

$\uparrow$ ·4 $D(a,b) = 1 \;.\supset.\; D(a^m, b^n) = 1$ { Euclides viii P2,3 }

·41 $D(a,b) = 1 \;.\supset:$

$D(a^2+ab,\, b^2) = 1 \,.\, D(a^2+b^2,\, ab) = 1$ { Euclides ix P15 }

·42 $a>b \,.\, D(a,10) = D(b,10) = 1 \;.\supset.\; a^2+b^2\,\varepsilon\, 10N_1 \,.\cup.\, a^2-b^2\,\varepsilon\, 10N_1$

·43 $D(a,b) = 1 \,.\, D(a+b,\, 3) = 1 \;.\supset.\; D(a+b,\, a^2-ab+b^2) = 1$

·44 $D(a,b) = 1 \;.\supset.\; (N_1+1) \cap (a^2+b^2)/N_1 \supset N_1^2+N_1^2$

·45 $a,b\,\varepsilon\, N_1 - N_1^2 \,.\, ab\,\varepsilon\, N_1^2 \;.\supset.\; D(a,b) > 1$

{ Leibniz a.1678 *Math. Schr.* t.7 p.122 }

·46 $D(a,b) = 1 \;.\supset:$

$N_1 \cap (a^2+b^2)/N_1 \supset (4N_0+1)\cup\iota 2 \;.\; N_1 \cap (a^4+b^4)/N_1 \supset (8N_0+1)\cup\iota 2$

·47 $D(a,b) = 1 \;.\supset.\; N_1 \cap [a\uparrow(2^m)+b\uparrow(2^m)]/N_1 \supset (N_0\times 2^{m+1}+1)\cup\iota 2$

{ Euler PetrNC. t.1 a.1747-48 p.32 }

·48 $N_1 \cap (2^{4^n}+1)/N_1 \supset 16n N_0 + 1$

·49 $D(a,b) = 1 \,.\, ab\,\varepsilon\, 4N_1+1 \;.\supset.\; N_1 \cap (a^{2\cdot dm}+b^{2\cdot dm})/N_1 \supset (8abnN_0+1)\cup\iota 2$

{ ·48·49 Lucas TorinoA. a.1878 t.13 p.281 }

Num ·5 $D(a,b) = \text{Num}\; 1\cdots b \cap x\ni(ax\,\varepsilon\, N_1\times b)$

rest ·6 $a - \varepsilon\, N_1 b \;.\supset.\; D(a,b) = D[b,\, \text{rest}(a,b)]$

·61 $D(a,b) = D[b,\, b-\text{rest}(a,b)]$

E ·7 $a,b \varepsilon N_0 . \mathrm{Dvr}(2a+1, 2b+1) = 1 . \supset .$
$\Sigma\{[\mathrm{E}r(2a+1)/(2b+1)] | r, 1\cdots b\} + \Sigma\{[\mathrm{E}r(2b+1)/(2a+1)] | r, 1\cdots a\} = ab$
{ Gauss a.1808 t.2 p.7 }

·71 $a,b \varepsilon N_1 . \supset . \mathrm{D}(a,b) = b + \Sigma[\mathrm{E}(ah/b) | h, 1\cdots b] + \Sigma[\mathrm{E}(-ah/b) | h, 1\cdots b]$

n ✻ 3·0 $u \varepsilon \mathrm{Cls'n} . \exists\, u - \iota 0 . \supset . \mathrm{D}u = \max[N_1 \frown x \ni (u \supset \mathrm{n} \times x)]$ Df

·01 $\mathrm{D}(\iota 0) = 0$ Df

·1 $u \varepsilon \mathrm{Cls'n} . \supset . \mathrm{D}(u \cup \iota 0) = \mathrm{D}u \quad . \quad \mathrm{D}u = \mathrm{D} \bmod u$

·2 $a,b,c \varepsilon \mathrm{n} . \supset : \exists\, (x;y) \ni (x,y \varepsilon \mathrm{n} . ax + by = c) . = . c \varepsilon \mathrm{n} \times \mathrm{D}(a,b)$

·3 $a,c \varepsilon \mathrm{n} . b \varepsilon N_1 . \mathrm{D}(a,b) = 1 . \supset . \exists\, 0\cdots(b-1) \frown x \ni (ax - c \;\varepsilon\; \mathrm{n}b)$

·4 $a,b,c \varepsilon \mathrm{n} . \mathrm{D}(a,b) = 1 . u,v \varepsilon \mathrm{n} . au + bv = c . \supset :$
$x,y \varepsilon \mathrm{n} . ax + by = c . = . \exists\, \mathrm{n}\, z \ni [x = u + bz . y = v - az]$

R ✻ 4·0 $u \varepsilon \mathrm{Cls'R} . \supset . \mathrm{D}u = \max[\mathrm{R} \frown x \ni (u \supset N_1 \times x)]$ Df

·1 $a,b,c \varepsilon N_1 . \supset . \mathrm{D}(a/c, b/c) = [\mathrm{D}(a,b)] / c$
{ Bertrand a.1849 p.105 }

$u,v \varepsilon \mathrm{Cls'R} . \exists u . \exists v . a \varepsilon \mathrm{R} . n \varepsilon N_1 . \supset .$ ·2 $\mathrm{D}(u \times v) = (\mathrm{D}u) \times \mathrm{D}v)$

·3 $(\mathrm{D}u)^n = \mathrm{D}(u^n)$ ·4 $\mathrm{D}[a \uparrow (0\cdots n)] = [\mathrm{D}(1,a)]^n$
{ Barrieu AnnN. a.1895 t.14 p.214 }

Continuation : §mlt 1·41 2·2, §nt ·9, §Np 12, §Φ, §Dtrm 4·1.

§45 mlt

$N_1 \times \min$ ✻ 1. $u,v \varepsilon \mathrm{Cls'}N_1 . a,b,c,d \varepsilon N_1 . \supset .$

·0 $\mathrm{mlt}u = \mathrm{m}u = \min[\, N_1 \frown x \ni (y \varepsilon u . \supset_y . x \varepsilon N_1 \times y) \,]$ Df
{ » = (le plus petit multiple commun des u)}

·01 $n \varepsilon N_1 + 1 . x \varepsilon N_1 \mathrm{F}\, 1\cdots n . \supset . \mathrm{m}x = \mathrm{m}(x'\, 1\cdots n)$ Df

·02 $\mathrm{m}(a,b) = \mathrm{m}(\iota a \cup \iota b) = \min(a \times N_1 \frown b \times N_1)$

·1 $\mathrm{m}\,\iota a = a \;.\; \mathrm{m}(a,a) = a \;.\; \mathrm{m}(1,a) = a \;.\; \mathrm{m}(a,b) = \mathrm{m}(b,a)$

·11 $a \varepsilon N_1 \times b . \supset . \mathrm{m}(a,b) = a$

·12 $c \varepsilon N_1 \times a . c \varepsilon N_1 \times b . \supset . c \varepsilon N_1 \times \mathrm{m}(a,b)$ { Euclides vii P35 }

·13 $\mathrm{m}(ac, bc) = c \times \mathrm{m}(a,b)$

·2 $\mathrm{m}(a,b,c) = \mathrm{m}[\mathrm{m}(a,b), c]$ { Euclides vii P36 }

$\mathrm{Num}u\; \varepsilon N_1 . \supset .$ ·3 $\mathrm{m}u\; \varepsilon N_1$ ·31 $\mathrm{m}(u \times a) = a \times \mathrm{m}u$

·32 $y \varepsilon u . \supset_y . a \varepsilon N_1 \times y : \supset . a \varepsilon N_1 \times \mathrm{m}u$

Num$u$, Num$v$ ε N_1 .$\supset$. ·33 $m(u \cup v) = m(mu, mv)$

·34 $m(u \times v) = mu \times mv$ { Stieltjes a.1895 p.4 }

·35 $n \varepsilon N_1 + 1$.$\supset$. $m(1 \cdots 2n) = m[(n+1) \cdots 2n]$

Dvr ·41 $D(a,b) = 1$.$\supset$. $m(a,b) = a \times b$ { Euclides vii P34 }

·42 $D(a,b) \times m(a,b) = a \times b$ { » » }

·5 $D(a,b,c) \times m(ab,ac,bc) = abc$

m ———D————————

$D(a,b,c,d) \times m(abc, abd, acd, bcd) = abcd$

m———— D—— ———————————

·51 Hp P·01 .$\supset$.

$Dx \times m[(\Pi x)/x\ , 1 \cdots n] = \Pi x$. $mx \times D[(\Pi x)/x\ , 1 \cdots n] = \Pi x$

·6 $m(a,b,c)\ D(a,b)\ D(a,c)\ D(b,c) = abc\ D(a,b,c)$

{ ·5-·6 Lebesgue a.1859 p.31,34 }

·7 $a,b,m,n,x \varepsilon N_1 . x^m - 1 \varepsilon N_1 \times a . x^n - 1 \varepsilon N_1 \times b . D(a,b) = 1$.$\supset$.

$x \uparrow m(m,n) - 1 \varepsilon N_1 \times a \times b$

·8 $[N_1, b \varepsilon N_1 \times a, D(a,b), m(a,b), 1] \mid [Cls, a \supset b, a \cap b, a \cup b, \Lambda]$

§1 P4·2·4·5 5·2-·64 6 7·2-·4 §2 §3

Cette P·8 dit que les P de Logique que nous venons de citer subsistent si l'on remplace Cls par N_1, " tout a est b " par " a est un diviseur de b ",....

R ✻ 2·0 $u \varepsilon$ Cls'R .$\supset$. $mu = \min[R \cap x \ni (u \supset x/N_1)]$ Df

·1 $a,b,c \varepsilon N_1$.$\supset$. $m(a/c\ , b/c) = [m(a,b)]/c$

{ Bertrand a.1849 p.107 }

·2 $a,b \varepsilon R$.$\supset$. $D(a,b) \times m(a,b) = ab$ { » » » }

$a \varepsilon$ Cls'R . Num$a$ εN_1 .$\supset$.

·3 $Da \times m\ /a = 1$

·4 $r \varepsilon R$.$\supset$. $D(ra) = rDa$. $m(ra) = r\,ma$

·5 $s \varepsilon N_1$.$\supset$. $D(a^s) = (Da)^s$. $m(a^s) = (ma)^s$

$n \varepsilon N_1$. $a \varepsilon$ R F $1 \cdots n$. $s \varepsilon 1 \cdots n$.$\supset$.

·6 D{$\Pi(a,u)$ | u, Cls'$1 \cdots n \cap x \ni$(Num$x = s$)} $\times$

m{———————— —————— $= n - s$)} $= \Pi a$

{ ·3-·6 Barrieu Mathesis a.1883 t.3 p.217 }

$u,v \varepsilon$ Cls'R . Num$u$, Num$v$ εN_1 . $a \varepsilon R$. $n \varepsilon N_1$.$\supset$.

·72-74 = (m|D) §Dvr P4·2-·4 { Barrieu AnnN. a.1895 t.14 p.214 }

§46 nt dt

/ R min ✻ 1. $a,b \varepsilon \mathrm{R} \,.\supset.$

·1 $\mathrm{nt}a = \min\} \mathrm{N}_1 \cap x \ni [\exists\, \mathrm{N}_1 \cap y \ni (x/y = a)] \{$ Df

·2 $\mathrm{dt}a = \min\} \mathrm{N}_1 \cap y \ni [\exists\, \mathrm{N}_1 \cap x \ni (x/y = a)] \{$ Df

·3 $\mathrm{nt}a, \mathrm{dt}a \ \varepsilon \mathrm{N}_1 \ . \ \mathrm{dt}a = \mathrm{nt}(/a) \ . \ \mathrm{nt}a = \mathrm{dt}(/a)$

·4 $\mathrm{nt}a = \min[\mathrm{N}_1 \cap \mathrm{N}_1 \times a] \ . \ \mathrm{dt}a = \min[\mathrm{N}_1 \cap \mathrm{N}_1/a]$ Dfp

·5 $\mathrm{nt}a = a \times \mathrm{dt}a \ . \ \mathrm{dt}a = \mathrm{nt}a\,/a \ . \ \mathrm{nt}a/\mathrm{dt}a = a$

·51 $a \varepsilon \mathrm{N}_1 \times b \ .=. \ \mathrm{nt}a \,\varepsilon\, \mathrm{N}_1 \times \mathrm{nt}b \ . \ \mathrm{dt}b \,\varepsilon\, \mathrm{N}_1 \times \mathrm{dt}a$

} V. MURER. *Bollettino diretto da* A. Conti, a.1900 t.2 p.10 {

·6 $a+b\, \varepsilon \mathrm{N}_1 \,.\supset.\, \mathrm{dt}a = \mathrm{dt}b \ . \ a-b\, \varepsilon \mathrm{N}_1 \,.\supset.\, \mathrm{dt}a = \mathrm{dt}b$

·7 $m \varepsilon \mathrm{N}_1 \,.\supset.\, \mathrm{dt}(m+a) = \mathrm{dt}a \ : \ m > a \,.\supset.\, \mathrm{dt}(m-a) = \mathrm{dt}a$

↾ ·8 $m \varepsilon \mathrm{N}_1 \,.\supset\, \mathrm{nt}(a^m) = (\mathrm{nt}a)^m \ . \ \mathrm{dt}(a^m) = (\mathrm{dt}a)$

·81 $m \varepsilon \mathrm{N}_1 \,.\supset:\, a \varepsilon \mathrm{R}^m \ .=. \ \mathrm{nt}a \,\varepsilon\, \mathrm{N}_1{}^m \ . \ \mathrm{dt}a \,\varepsilon\, \mathrm{N}_1{}^m$

Dvr mlt ·9 $\mathrm{Dvr}(\mathrm{nt}a\,,\ \mathrm{dt}a) = 1$

·91 $\mathrm{nt}a = /\mathrm{Dvr}(1, /a) \ . \ \mathrm{dt}a = /\mathrm{Dvr}(1, a)$ Dfp

·92 $\text{—} = /\,\mathrm{mlt}(1, a) \qquad \text{—} = /\mathrm{mlt}(1, /a)$ Dfp

·93 $a \varepsilon \mathrm{Cls}'\mathrm{R} \,.\, \mathrm{Num}a\, \varepsilon \mathrm{N}_1 \,.\supset.\, \mathrm{Dvr}a = \mathrm{Dvr}(\mathrm{nt}'a)/\mathrm{mlt}(\mathrm{dt}'a)$

·94 » » » $.\supset.\, \mathrm{mlt}a = \mathrm{mlt}(\mathrm{nt}'a)\ /\mathrm{Dvr}(\mathrm{dt}'a)$

} BARRIEU Mathesis a.1883 t.3 p.217 {

✻ 2. $a,b \varepsilon \mathrm{N}_1 \,.\supset.$

·1 $\mathrm{nt}(a/b) = a/\mathrm{Dvr}(a,b)$ ·2 $\mathrm{dt}(a/b) = b/\mathrm{Dvr}(a,b)$

·3 $\mathrm{Dvr}(a,b) = 1 \ .=. \ a = \mathrm{nt}(a/b) \ .=. \ b = \mathrm{dt}(a/b)$

·4 $\mathrm{nt}(a/b) = \mathrm{mlt}(a,b)\,/b$ ·5 $\mathrm{dt}(a/b) = \mathrm{mlt}(a,b)\,/a$

nt a = « le numérateur de a »

dt a = « le dénominateur de a »

en supposant que le nombre rationnel a soit réduit à la forme plus simple. Voir A. Padoa RdM. a.1898 p.90-94.

Continuation: §Np P14 §mp 3.

§51 Np = (nombre premier)

× ❋ 1·0 $\mathrm{Np} = (1+\mathrm{N}_1) - [(1+\mathrm{N}_1) \times (1+\mathrm{N}_1)]$ Df

·1 $2, 3, 5, 7, 11, \ldots \varepsilon \mathrm{Np}$

{ Voir : Burckhardt, *Table des diviseurs pour tous les nombres du premier, deuxième, troisième million.* Paris 1814-1817.

Glaisher, *Tables des diviseurs pour tous les nombres du 4me, 5me, 6me, million.* London 1879-83.

Dase, *Table des diviseurs pour tous les nombres du 7me, 8me, 9me million.* Hamburg 1862-1865.

Dase et Rosenberg, *Id. du 10me million.* Archiv der Akademie, *(non publiée)* Berlin.

·2 $a \varepsilon \mathrm{Np} \,.\, b,c \varepsilon \mathrm{N}_1 \,.\, bc \,\varepsilon\, \mathrm{N}_1 \times a \;.\!\supset\!.\; b \varepsilon \mathrm{N}_1 \times a \;.\!\cup\!.\; c \varepsilon \mathrm{N}_1 \times a$

{ Euclides vii P30 :

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, τὸν δὲ γενόμενον ἐξ αὐτῶν μετρῇ τις πρῶτος ἀριθμός, καὶ ἕνα τῶν ἐξ ἀρχῆς μετρήσει.}

·3 $\mathrm{N}_1 + 1 \supset \mathrm{N}_1 \times \mathrm{Np}$ { Euclides vii P31 :

Ἅπας σύνθετος ἀριθμὸς ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται. }

·4 $2(\mathrm{N}_1+1) \supset \mathrm{Np}+\mathrm{Np}$ { Goldbach a.1742 CorrM. t.1 p.135 }

G. Cantor (Congrès de Caen de l'A.F., a.1894) a vérifié que $2 \times (2 \cdots 500) \supset \mathrm{Np}+\mathrm{Np}$; V. Aubry (IdM. t.3 a.1896 p.75) que $2 \times (2 \cdots 1000) \supset \mathrm{Np}+\mathrm{Np}$.

— ❋ 2·1 $\mathrm{Np} \cap (\mathrm{N}_1+3) \supset (6\mathrm{N}_1+1) \cup (6\mathrm{N}_1-1)$

{ Bungus a.1599 p.399 : «...semper ... numeri primi post binarium et ternarium, in senariorum multiplicium vicinia collocati comperientur, aut uno minores, aut uno majores. » }

·2 $a \varepsilon \mathrm{N}_1 + 3 \;.\!\supset\!.\; \exists\, \mathrm{Np} \cap (a+\mathrm{N}_1) \cap (2a - \mathrm{N}_1 - 2)$

{ Bertrand JP. a.1845 Cahier 30 p.129.

Dem. Tchebychef a.1852 Œuvres t.1 p.52 }

↾ ❋ 3·1 $a \varepsilon 1+\mathrm{N}_1 \,.\, -\exists\, \mathrm{Np} \cap x \ni (x^2 \leqq a \,.\, a \varepsilon \mathrm{N}_1 \times x) \;.\!\supset\!.\; a \varepsilon \mathrm{Np}$

{ Leonardo Pisano a.1202 p.38 :

«Qui primum numerum... cognoscere voluerit... semper eat dividendo ipsum per primos numeros ordinate, donec aliquem primum numerum invenerit, per quem propositum numerum absque alia superatione possit dividere, vel donec ad eiusdem pervenerit radicem : si per nullum ipsorum dividi potuerit, tunc primum ipsum esse indicabit. » }

·2 $\mathrm{Np} \cap (4\mathrm{N}_1+1) \supset \mathrm{N}_1^2+\mathrm{N}_1^2$ { GIRARD a.1634 p.156 :
« Tout nombre premier qui excede un nombre quaternaire de l'unité se peut diviser en deux quarrez entiers. » }

·21 $a,b,c,d \,\varepsilon\, \mathrm{N}_1 \,.\, a^2+b^2 = c^2+d^2 \,.\, a^2+b^2 \,\varepsilon\, \mathrm{Np} \,.\supset.\, \iota a \cup \iota b = \iota c \cup \iota d$
{ FERMAT t.1 p.294 : « Numerus primus qui superat unitate quaternarii multiplicem, semel tantum est hypotenusa trianguli rectanguli » }

·22 $a \,\varepsilon\, \mathrm{Np} \cap (4\mathrm{N}_0+3) \,.\, b,c \varepsilon \mathrm{N}_1 \,.\, b^2+c^2 \,\varepsilon\, \mathrm{N}_1 \times a \,.\supset.\, b,c \,\varepsilon\, \mathrm{N}_1 \times a$
{ FERMAT a.1640 t.2 p.204 :
« Si un nombre est composé de deux quarrés premiers entre eux, je dis qu'il ne peut être divisé pas aucun nombre premier moindre de l'unité qu'un multiple du quaternaire ».

Continuation : §mp 1·7.

·3 $\mathrm{Np} \cap (3\mathrm{N}_0+1) \supset \mathrm{N}_1^2+3\mathrm{N}_1^2$ { FERMAT a.1654 t.2 p.313 {
$\mathrm{Np} \cap [(8\mathrm{N}_1+1) \cup (8\mathrm{N}_0+3)] \supset \mathrm{N}_1^2+2\mathrm{N}_1^2$ { » » {
$\mathrm{Np} \cap [(8\mathrm{N}_1+1) \cup (8\mathrm{N}_1-1)] \supset \mathrm{N}_1^2-2\mathrm{N}_1^2$
Continuation : LEGENDRE a.1797 tables 3 et 4.

·4 $2^2-1,\ 2^3-1,\ 2^5-1,\ 2^7-1 \,\varepsilon\, \mathrm{Np}$ { EUCLIDES IX P36 scolia {
$2^{13}-1,\ 2^{17}-1,\ 2^{19}-1 \,\varepsilon\, \mathrm{Np}$
$2^{31}-1 \,\varepsilon\, \mathrm{Np}$ { EULER BerlinM. a.1772 p.35 {
$2^{61}-1 \,\varepsilon\, \mathrm{Np}$ {PERVOUCHINE, Acad. S. Petersbourg, a.1883 {
$2^1+1,\ 2^2+1,\ 2^4+1,\ 2^8+1,\ 2^{16}+1 \,\varepsilon\, \mathrm{Np}$ Voir §↾ P5·6.
$7 \times 2^{50}+1 \,\varepsilon\, \mathrm{Np}$ { SEELHOFF Zm. a.1886 t.31 p.380 {

·5 $n \varepsilon \mathrm{N}_1 \,.\supset.\, (2\restriction)^n 1 + 1 \,\varepsilon\, \mathrm{Np}$
{ GERGONNE a.1828 Ann. t.19 p.256; Dem? {

·6 $m \,\varepsilon\, \mathrm{N}_1 \,.\supset:\, m^4+4 \,\varepsilon\, \mathrm{Np} \,.=.\, m=1$ [§↾ P14·25. $b=1 \,.\supset.$ P]
{ GOLDBACH a.1742 CorrM. t.1 p.139 ; S. GERMAIN a.1772 p.296 {

·7 $a \,\varepsilon\, \mathrm{Np} \,.\, b,n \varepsilon \mathrm{N}_1 \,.\, b^n \,\varepsilon\, \mathrm{N}_1 \times a \,.\supset.\, b \,\varepsilon\, \mathrm{N}_1 \times a$ {EUCLIDES IX P12{
·71 ———————— . $a^n \,\varepsilon\, \mathrm{N}_1 \times b \,.\supset.\, b \,\varepsilon\, a \restriction \mathrm{N}_1$ { » » P13{

·8 $m \varepsilon \mathrm{N}_1 \,.\, 2^m+1 \,\varepsilon\, \mathrm{Np} \,.\supset.\, m \,\varepsilon\, 2 \restriction \mathrm{N}_0$ { FERMAT a.1640 t.2 p.205{
[$p \varepsilon\ 2\mathrm{N}_1+1 \,.\, m \varepsilon \mathrm{N}_1$. §↾ 5·7 $.\supset.\ 2^{mp}+1 \ \varepsilon\ (\mathrm{N}_1+1) \times (2^m+1) \,.\supset.$ P]

·9 $a \,\varepsilon\, \mathrm{Np} \,.\, b \,\varepsilon\, (1+\mathrm{N}_1) - (\mathrm{N}_1 \times a) \,.\supset.\, b^{a-1}-1 \,\varepsilon\, \mathrm{N}_1 \times a$
{Les chinois ont connu cette P pour $b=2$, dès le temps de *Confucius*, a. —550 ⊢—477 ; cfr. Heans Mm. a.1898 t.27 p.174{
{ FERMAT a.1640 t.2 p.209 :
« Tout nombre premier mesure infalliblement une des puissances —1 de quelque progression que ce soit, et l'exposant de la dite puissance est

sous multiple du nombre premier donné -1; et après qu'on a trouvé la première puissance qui satisfait à la question, toutes celles dont les exposants sont multiples de l'exposant de la première satisfont tout de même à la question. »}

} Dem. LEIBNIZ *MathS.* t.7 p.154 ; EULER PetrC. a.1736 t.8 p.143 ; PetrNC. t.8 p.70 {

·91 $a \varepsilon \mathrm{Np} \,.\, b,c \varepsilon \mathrm{N}_1 \,.\supset.\, (b+c)^a - b^a - c^a \;\varepsilon\; \mathrm{N}_1 \times a$

} EULER PetrNC. a.1747 t.1 p.20 {

✻ 4·1 $m \varepsilon \mathrm{N}_1 \,.\, 4m+1 \;\varepsilon\; \mathrm{Np} \,.\supset.\, m^m - 1 \;\varepsilon\; \mathrm{N}_0 \times (4m+1)$

} BIKMORE a.1896 *Ed. Times*, t.65 p.78 {

·2 $m \varepsilon 2 \upharpoonleft \mathrm{N}_1 \,.\supset:\, 2^m+1 \;\varepsilon\; \mathrm{Np} \,.=.\, 3 \upharpoonleft [2 \upharpoonleft (m-1)] + 1 \;\varepsilon\; \mathrm{N}_1 \times [(2 \upharpoonleft m)+1]$

} PROTH CorrN. a.1878 t.4 p.210 {

·3 $m \varepsilon \mathrm{N}_1 \,.\, 2^m - 1 \;\varepsilon\; \mathrm{Np} \,.\supset.\, m \varepsilon \mathrm{Np}$ } FERMAT a.1640 t.2 p.198 {

·4 $q \varepsilon \mathrm{N}_0 \,.\, 4q+3 \,,\, 8q+7 \;\varepsilon\; \mathrm{Np} \,.\supset.\, 2^{4q+3} - 1 \;\varepsilon\; (8q+7)\mathrm{N}_1$

} LUCAS TorinoA. a.1878 t.13 p.283 {

✻ 5. $m,a,b,c \varepsilon \mathrm{N}_1 \,.\, p \varepsilon \mathrm{Np} - \iota 2 \,.\supset.$

·1 $a^m + b^m \;\varepsilon\; \mathrm{Np} \,.\supset.\, m \varepsilon 2 \upharpoonleft \mathrm{N}_0$

·2 $a^m - b^m \;\varepsilon\; \mathrm{Np} \,.\supset.\, m \varepsilon \mathrm{Np} \,.\, a = b+1$

·3 $\mathrm{N}_1 \frown (a^p - b^p)/\mathrm{N}_1 \supset [\mathrm{N}_1 \frown (a-b)/\mathrm{N}_1] \smile (\mathrm{N}_1 \times p + 1)$

·4 $\mathrm{N}_1 \frown (2^p - 1)/\mathrm{N}_1 \supset \mathrm{N}_0 \times p + 1$

·5 $a^{p-1} + b^{p-1} \;\varepsilon\; \mathrm{N}_1 \times p \,.\supset.\, a,b \varepsilon \mathrm{N}_1 \times p$

} ·1-·5 EULER PetrNC. a.1747-48 I p.20 {

·9 $a \varepsilon \mathrm{N} \,.\, 2a+1 \;\varepsilon\; \mathrm{Np} \,.\, b \varepsilon \mathrm{n} - \mathrm{n}(2a+1) \,.\supset.$

$(-b)^a - 1 \;\varepsilon\; \mathrm{n}(2a+1) \,.=.\, b \varepsilon \mathrm{n}^2 + (2a+1)\mathrm{n}$

} LEGENDRE a.1797 N.134 {

Les nombres $\mathrm{n}^2 + a\mathrm{n}$ s'appellent « résidus quadratiques de a ».

··· ✻ 6·1 $x \varepsilon 0 \cdots 9 \,.\supset.\, x^2 + x + 11 \;\varepsilon\; \mathrm{Np}$

·2 $x \varepsilon 0 \cdots 15 \,.\supset.\, x^2 + x + 17 \;\varepsilon\; \mathrm{Np}$ } EULER *Op. post.* t.1 p.185 {

·3 $x \varepsilon 0 \cdots 39 \,.\supset.\, x^2 + x + 41 \;\varepsilon\; \mathrm{Np}$ } EULER BerlinM. a.1772 p.36 {

·4 $x \varepsilon 0 \cdots 28 \,.\supset.\, 2x^2 + 29 \;\varepsilon\; \mathrm{Np}$ } LEGENDRE a.1797 p.10 {

Num ✻ 7·1 $\mathrm{Num}\, \mathrm{Np} \;\varepsilon\; \mathrm{infn}$ } EUCLIDES IX P20 :

Οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ πλείους εἰσὶν παντὸς τοῦ προτεθέντος πλήθους πρώτων ἀριθμῶν. {

·2 $\mathrm{Num}\, \mathrm{Np} \frown (4\mathrm{N}_1 + 3) \;\varepsilon\; \mathrm{infn}$

·3 $\mathrm{Num}\, \mathrm{Np} \frown (4\mathrm{N}_1 + 1) \;\varepsilon\; \mathrm{infn}$ Continuation: P12·7

·4 $\mathrm{Num}\, \{\mathrm{Np} \frown [2 \upharpoonleft (2 \upharpoonleft \mathrm{N}_1) + 1]\} \;\varepsilon\; \mathrm{infn}$

} EISENSTEIN a.1843 JfM. t.27 p.87; Dem? {

Σ ✻ 8·1 $p \varepsilon \mathrm{Np} - \iota 2 \,.\, q \varepsilon 1 \cdots (p-1) \;.\supset.\; \Sigma[1 \cdots (p-1)] \uparrow q \;\varepsilon\; \mathrm{N}_1 \times p$

{MATROT, Revue semestrielle a.1900, t.8_1 p.40}

·2 $m \varepsilon \mathrm{N}_0 \,.\, n \varepsilon \mathrm{N}_1 \,.\, p \varepsilon \mathrm{Np} - \iota 2 \,.\, q \varepsilon 1 \cdots (p-1) \;.\supset.$

$\Sigma\{r \uparrow [m(p-1)+q] | r,\; 1 \cdots (np-1)\} \;\varepsilon\; \mathrm{N}_1 \times p$

{PAPPIT, Revue semestrielle a.1900, t.8_1 p.40}

·3 $n \varepsilon \mathrm{N}_1 \,.\, x \varepsilon \mathrm{N}_1 \mathrm{F}\, 1 \cdots n \,.\, a \varepsilon \mathrm{Np} \;.\supset.\; (\Sigma x)^a - \Sigma(x^a) \;\varepsilon\; \mathrm{N}_1 \times a$

Π ! C ✻ 9·1 $a \varepsilon (\mathrm{N}_1 + 4) - \mathrm{Np} \;.\supset.\; (a-2)! \;\varepsilon\; \mathrm{N}_1 \times a$

·2 $a \varepsilon \mathrm{Np} \;.\supset.\; (a-2)! - 1 \;\varepsilon\; \mathrm{N}_0 \times a$

{ LEIBNIZ Mss. Math. t.3 B11 fol.10:

« Productus continuorum usque ad numerum qui antepraecedit datum divisus per datum relinquit 1, ... si datus sit primitivus. Si datus sit derivativus relinquet numerus qui cum dato habeat communem mensuram unitate majorem. » }

·3 $a \varepsilon 1 + \mathrm{N}_1 \,.\, (a-1)! + 1 \;\varepsilon\; \mathrm{N}_1 \times a \;.\supset.\; a \varepsilon \mathrm{Np}$

{ LAGRANGE a.1771 t.3 p.432 }

·4 $a \varepsilon \mathrm{Np} \;.\supset.\; (a-1)! + 1 \;\varepsilon\; \mathrm{N}_1 \times a$ { WILSON, Voir WARING a.1770 p.218 ; Dem. LAGRANGE a.1771 t.3 p.425 }

·5 $a \varepsilon \mathrm{Np} \;.=.\; a \varepsilon \mathrm{N}_1 + 1 \,.\, (a-1)! + 1 \;\varepsilon\; \mathrm{N}_1 \times a$ [= ·3·4]

·6 $a \varepsilon \mathrm{N}_1 \,.\, 4a+1 \;\varepsilon\; \mathrm{Np} \;.\supset.\; [(2a)!]^2 + 1 \;\varepsilon\; \mathrm{N}_1 \times (4a+1)$

·61 » $.\, 4a-1$ » » — » — »

{ WARING a.1770; a.1782 p.380 : « Sit n numerus primus ...

$$\frac{2^2 3^2 4^2 5^2 \ldots \overline{\frac{n-1}{4}}^2 \pm 1}{n}$$

(ubi erit +1, quando $\frac{n-1}{2}$ fit par numerus, sin aliter −1) integri erunt numeri. »}

{ Dem. LAGRANGE a.1771 t.3 p.431 }

·7 $a \varepsilon \mathrm{Np} \,.\, b \varepsilon 1 \cdots (a-1) \;.\supset.\; \mathrm{C}(a,b) \;\varepsilon\; \mathrm{N}_1 \times a$

{ LEIBNIZ *Math. Schr.* t.7 p.102:

« Si numerus rerum sit primitivus, combinatio ejus quaelibet per ipsum dividi potest, dempta prima et ultima. »}

·71 $a \varepsilon \mathrm{Np} \,.\, b \varepsilon 0 \cdots (a-1) \;.\supset.\; \mathrm{C}(a-1\,,\, b) \;\varepsilon\; \mathrm{N}_0 \times a + (-1)^b$

·72 $a \varepsilon \mathrm{Np} - \iota 2 \,.\, b \varepsilon 2 \cdots (a-1) \;.\supset.\; \mathrm{C}(a+1\,,\, b) \;\varepsilon\; \mathrm{N}_1 \times a$

{ ·71·72 LUCAS AJ. a.1878 t.1 p.229 }

·73 $\mathrm{Hp}·7 \;.\supset.\; \mathrm{C}(a-2,\, b-1) \;\varepsilon\; \mathrm{N}_1 \times a - (-1)^b \times b$

·8 $n \varepsilon \mathrm{N}_1 + 1 \,.\, a \varepsilon \mathrm{Np} \,.\, x \varepsilon \mathrm{N}_1 \mathrm{F} 1 \cdots n \,.\, \Pi x \;\varepsilon\; \mathrm{N}_1 \times a \;.\supset.$

$\exists\, 1 \cdots n \frown r \ni (x_r \;\varepsilon\; \mathrm{N}_1 \times a)$

·81 $n \varepsilon N_1+1 \,.\, a \varepsilon Np \,.\, x \varepsilon Np\, F\, 1\cdots n \,.\, \Pi x \varepsilon N_1 \times a \,.\supset.$
$\exists\, 1\cdots n \frown r \ni (x_r = a)$

min ❋ 10·1 $a \varepsilon 1+N_1 \,.\supset.\, \min[(1+N_1) \frown (a/N_1)] \varepsilon Np$

$a \varepsilon Np \,.\, b \varepsilon (N_1+1) - N_1 \times a \,.\supset.$

·21 $\min[N_1 \frown x \ni (b^x - 1 \,\varepsilon\, a \times N_1)] \,\varepsilon\, N_1 \frown (a-1)/N_1$

·22 $N_1 \frown x \ni (b^x - 1 \,\varepsilon\, a \times N_1) = N_1 \times \min[N_1 \frown x \ni (b^x - 1 \varepsilon\, a \times N_1)]$
} Fermat voir P3·9 {

·3 $a \varepsilon N_1 \,.\supset.\, \min[(N_1+1) \frown x \ni (a!+1 \,\varepsilon\, x \times N_1)] \,\varepsilon\, Np \frown (N_1+a)$

E β ❋ 11.

·1 $a \varepsilon N_1 \,.\supset.\, a! = \Pi\{\Pi[\Pi(Np \frown 0\cdots E(s^{-1} \times \sqrt[r]{a})) \mid s, N_1] \mid r, N_1\}$
} Tchebychef a.1852 Œuvres t.1 p.53 {

$m,n \varepsilon N_1 \,.\, p \varepsilon Np \,.\supset.$

·2 $C(m,n) \,\varepsilon\, \Pi\{C[p\beta(m/p^r), p\beta(n/p^r)] \mid r, N_1\} + N_1 \times p$

·3 $C(m,n) \,\varepsilon\, C[E(m/p), E(n/p)] \times C[p\beta(m/p), p\beta(n/p)] + N_1 \times p$
} ·2·3 Lucas a.1878 AJ. t.1 p.230 {

Dvr ❋ 12·1 $b \varepsilon Np \,.\, a \varepsilon N_1 - (N_1 \times b) \,.\supset.\, Dvr(a,b) = 1$
} Euclides vii P29:
Ἅπας πρῶτος ἀριθμὸς πρὸς ἅπαντα ἀριθμόν, ὃν μὴ μετρεῖ, πρῶτός ἐστιν.{

·2 $b \varepsilon Np \,.\, a \varepsilon 1\cdots(b-1) \,.\supset.\, Dvr(a,b) = 1$ [P·1 .⊃. P]

·3 $a,b \varepsilon Np \,.\, a -= b \,.\supset.\, Dvr(a,b) = 1$ » »

$m,n,a,b \varepsilon N_1 \,.\, p \varepsilon Np \,.\supset.$

·4 $a^m + b^n \,\varepsilon\, Np \,.\supset.\, Dvr(m,n) \,\varepsilon\, 2 \upharpoonright N_0$ } Lucas a.1891 p.342 {

·5 $a^m - b^m \,\varepsilon\, N_1 \times p \,.\supset.\, a \upharpoonright Dvr(m, p-1) - b \upharpoonright Dvr(m, p-1) \,\varepsilon\, N_1 \times p$
} Euler PetrNC. a.1747-48 t.1 p.20 {

·6 $a,b \varepsilon N_1 \,.\, Dvr(a,b) = 1 \,.\supset.\, Num[Np \frown (a + N_1 \times b)] \,\varepsilon\, infn$
} Legendre a.1808 p.398; Dem. Dirichlet a.1837 t.1 p.313 {

·7 $Num[(x;y) \ni (x,y \varepsilon N_1 \,.\, xy = a \,.\, Dvr(x,y) = 1 \,.\, x < y)] =$
$2 \upharpoonright [Num(Np \frown a/N_1) - 1]$ } Legendre a.1797 p.8 {

nt ❋ 13. $p \varepsilon Np \,.\, p > 3 \,.\supset.$

·1 $nt\Sigma\, [1\cdots(p-1)] \,\varepsilon\, p^2 \times N_1$ } Osborn a.1892 Mm. t.22 p.51 {

·2 $nt\Sigma\, [1\cdots(p-1)]^2 \,\varepsilon\, p \times N_1$ } Glaisher a.1900 QJ. t.31 p.337 {

Continuation : §mp ·41, §Φ ·6, §Nprf, § lim 31, §log 3·1·2.

§52 mp

$\upharpoonleft$ max ✻ 1. $a\varepsilon N_1 . b\varepsilon N_1+1 .\supset.$

·0 $\text{mp}(b,a) = \max[N_0 \frown x\ni(a\varepsilon N_1 \times b^x)]$ Df

·11 $\text{mp}(b,1) = 0$

mp(b,a) = « l'exposant de la plus grande puissance (maxima potestas) de b qui divise a ». En général (P·41 et suivantes) $b\varepsilon$ Np.

·12 $\text{mp}(b,a) = \iota\, N_0 \frown x\ni[a\varepsilon (b^x \times N_1) - (b^{x+1}\times N_1)]$ Dfp

·13 ————————— $[0 \cdots x = N_0 \frown y\ni(a\varepsilon b^y \times N_1)]$ Dfp

·2 $a -\varepsilon N_1 \times b .\supset. \text{mp}(b,a) = 0$ ·3 $a\varepsilon N_1 \times b .\supset. \text{mp}(b,a)\, \varepsilon N_1$

Dvr ·4 $c\varepsilon N_1 . \text{Dvr}(b,c) = 1 .\supset. \text{mp}(b,a) = \text{mp}(b, ac)$

Np ·41 $a\varepsilon \text{Np} . b,c\varepsilon N_1 .\supset. \text{mp}(a, bc) = \text{mp}(a,b) + \text{mp}(a,c)$

·5 $a\varepsilon N_1 \times b .=: x\varepsilon \text{Np} . \supset_x . \text{mp}(x,b) \leqq \text{mp}(x,a)$

·6 $m\varepsilon N_1 .\supset\therefore a\varepsilon N_1^m .=: x\varepsilon \text{Np} . \supset_x . \text{mp}(x,a)\, \varepsilon N_0 \times m$

·7 $a\varepsilon N_0^2 + N_1^2 .=: p\varepsilon \text{Np} \frown (4N_0+3) .\supset_p. \text{mp}(p,a)\, \varepsilon 2N_0$
{ Girard a.1634 p.156 }

·8 $x\varepsilon \text{Np} .\supset. \text{mp}[x, \text{Dvr}(a,b)] = \min[\text{mp}(x,a), \text{mp}(x,b)]$

·9 $x\varepsilon \text{Np} .\supset. \text{mp}[x, \text{mlt}(a,b)] = \max[\text{mp}(x,a), \text{mp}(x,b)]$

✻ 2·0 $p\varepsilon \text{Np} . a\varepsilon N_1 .\supset. \text{mp}(p, a!) = \Sigma\{[E(a/p^r)] | r, N_1\}$
$= E(a/p) + E(a/p^2) + \ldots\ldots$
{ Legendre a.1830 t.1 p.11 }

·1 $a\varepsilon N_1 .\supset. a = \Pi\{[x \upharpoonleft \text{mp}(x,a)] | x, \text{Np}\}$

·2 » $\text{Num}(N_1 \frown a/N_1) = \Pi\{[\text{mp}(x,a)+1] | x, \text{Np}\}$

{ Wallis a.1685 t.2 p.498:

« Si fiat Numerus, ex continua Multiplicatione quoteunque numerorum Primorum (inter se diversorum) aut quarumvis Potestatum talium Primorum: Numerus Divisorum numeri sic compositi, componitur (continua multiplicatione) ex Primorum illorum, eorumve Potestatum sic compositarum, Exponentibus, Uno, singulatim auctis. » }

·3 $u\varepsilon \text{Cls}'N_1 . \exists u .\supset. \text{Dvr}\,u = \Pi\{[x \upharpoonleft \min \text{mp}(x,u)] | x, \text{Np}\}$

·4 ———. $\text{Num}\,u\varepsilon N_1 .\supset. \text{m}u =$ ———max—————

·5 $a \varepsilon N_1 .\supset. \Sigma(N_1 \frown a/N_1) = \Pi\{[x \uparrow [mp(x,a)+1]-1]/(x-1)\}|x, Np\}$

———— $= \Pi\{\Sigma[x^r|r, 0\cdots mp(x,a)]|x, Np\}$

{ WALLIS a.1658 t.2 p.814 :

« Si duorum pluriumve numerorum primorum potestates quaelibet invicem ducantur, factus partibus suis aliquotis auctus, aequatur facto ex componentibus partium suarum aliquotarum additione auctis ». }

·6 $n \varepsilon N_1+1 .\supset. \exists Np \frown x \ni [mp(x, n!) = 1]$

{ LIOUVILLE JdM. s.2 t.2 a.1857 p.278 }

·7 $n \varepsilon N . x \varepsilon N_1 F 1\cdots n . a \varepsilon Np .\supset.$

$mp(a, \Pi x) = \Sigma[mp(a, x_r)|r, 1\cdots n]$

✻ 3·1 $a \varepsilon R . b \varepsilon N_1+1 .\supset. mp(b,a) = mp(b, nt\,a) - mp(b, dt\,a)$ Df

C'est-à-dire : mp(b,a) est la plus grande puissance de b qui divise le numérateur réduit de a, ou la plus grande puissance, changée de signe, qui en divise le dénominateur réduit. Un de ces deux nombres est toujours nul car on a (§nt P1·9) : Dvr(nt a, dt a) = 1. Cette Df comprend celle donnée pour le cas où $a \varepsilon N_1$. Alors on a dt a = 1, il s'ensuit que mp(b,dt a) = 0.

·2 $a \varepsilon N_1+1 . b \varepsilon R .\supset.$ P1·5

·3 $m \varepsilon N_1 .\supset\therefore a \varepsilon R^m .=: x \varepsilon Np .\supset_x . mp(x,a) \varepsilon n \times m$

·4·5 $a \varepsilon N_1+1 . b \varepsilon R .\supset.$ P1·8·9 ·6 = (R|N₁)P2·1

·7 $u \varepsilon Cls'R . \exists u .\supset.$ Ths P2·3

·8 ——— . Num $u \varepsilon N_1 .\supset.$ ————————·4

{ ·6·7·8 BARRIEU AnnN. a. 1895 t.14 :

·6. — Tout nombre fractionnaire est un produit de facteurs premiers affectés d'exposants entiers, positifs, ou négatifs. (p. 96).

·7. Pour former le plus grand commun diviseur de n nombres, entiers ou fractionnaires, on fait le produit de tous les facteurs premiers qui entrent dans ces nombres, en affectant chacun de ces facteurs de son plus faible exposant. (p. 97).

·8. Il y a une loi de formation analogue pour former le plus petit commun multiple. (id.) }

§53 Φ

N_1 ⋯ Num Dvr ✻ 1. $a,b \varepsilon N_1 .\supset.$

·0 $\Phi a =$ Num$\{ 1 \cdots a \frown x \ni [\text{Dvr}(x,a) = 1] \}$ Df

·01 $\Phi 1 = 1 . \Phi 2 = 1 . \Phi 3 = 2 \ldots$ ·02 $\Phi a \, \varepsilon \, N_1$

Note. Le symbole Φ a été introduit par Gauss, a. 1801, *Werke,* t.1 p.30. Euler, PetrA. t.4 II a.1780 p.18 a proposé le symbole πa. Cauchy l'appelle « indicateur ».

Σ ·1 $\Sigma(\Phi, N_1 \frown a/N_1) = a$ $\{$Gauss a.1801 t.1 p.31: « Si a, a' a'' etc. sunt omnes divisores ipsius A (unitate et ipso A non exclusis), erit $\Phi a + \Phi a' + \Phi a'' +$etc.$=A$ » $\}$

Dvr ·2 $\text{Dvr}(a,b) = 1 .\supset. \Phi(ab) = (\Phi a)(\Phi b)$

·3 $\text{Dvr}(a,b) = 1 .\supset. (a \uparrow \Phi b) - 1 \, \varepsilon \, b N_0$

Np ·4 $a \varepsilon \text{Np} .\supset. \Phi a = a - 1$

·5 $\text{———} . m \varepsilon N_1 .\supset. \Phi a^m = a^{m-1}(a-1)$

mp ·6 $a \varepsilon N_1 + 1 .\supset.$

$\Phi a = \Pi \{ [x \uparrow (\text{mp}(x,a) - 1) \times (x-1)] | x, \text{Np} \frown a/N_1 \}$

$\{$ ·2-·6 Euler PetrNC. a.1760-61 t.8:

(p.85) ... Quoniam hic quaestio est de numeris, qui ad quempiam numerum sint primi, eoque minores, eos commode *partes ad istum numerum primas* appellare licebit.

... Si numerus propositus fuerit primus $=p$, numerus partium ad eum primarum est $=p-1$.

Si numerus propositus sit potestas quaecumque numeri primi $= p^n$, numerus partium ad eum primarum erit $= p^{n-1}(p-1)$.

(p.86) *Theor. I.* Si sint A et B numeri inter se primi, et numerus partium ad A primarum sit $=a$, numerus vero partium ad B primarum sit $=b$; tum numerus partium ad productum AB primarum erit $=ab$.

(p.88) Existentibus scilicet p, q, r, s etc. numeris primis, omnis numerus N in huiusmodi forma

$$N = p^\lambda q^\mu r^\nu s^\xi$$

comprehendetur; unde numerus partium ad N primarum erit:

$$p^{\lambda-1}(p-1) . q^{\mu-1}(q-1) . r^{\nu-1}(r-1) . s^{\xi-1}(s-1)$$

(p.103) ... Proposito ergo numero quocumque N, cuius partium ad ipsum primarum numerus sit $=n$, quicumque numerus ad N primus pro x capiatur, formula $x^n - 1$ semper erit per numerum N divisibilis. $\}$

§54 Nprf = (Nombre parfait)

N_0 N_1 $+$ $-$ $\times$ $/$ $\upharpoonleft$ $>$ $\cdots$ Σ min Np Nprf

·0 $\mathrm{Nprf} = N_1 \frown x \ni \{x = \Sigma\, N_1 \frown [x/(N_1+1)]\}$ Df

La notation Nprf = (Nombre parfait) = τέλειος ἀριθμός a été introduite par M. Nassò RdM. a.1900 p.52, qui a écrit les P·1-·4. M. C. Ciamberlini a ajouté les P·5.

·1 $m \varepsilon\, \iota 2 \cup \iota 3 \cup \iota 5 \cup \iota 7 \cup \iota 13 \cup \iota 17 \cup \iota 19 \cup \iota 31 \cup \iota 61 \;.\supset.\; 2^{m-1}(2^m-1)\, \varepsilon\, \mathrm{Nprf}$

·2 $m, 2^m-1\, \varepsilon\, \mathrm{Np} \;.\supset.\; 2^{m-1}(2^m-1)\, \varepsilon\, \mathrm{Nprf}$ { Euclides IX P36 }

·3 $a \varepsilon\, \mathrm{Nprf} \frown 2N_1 \;.\supset.\; \exists\, N_1 \frown m \ni [a = 2^{m-1}(2^m-1)]$
{ Descartes Œuvres a.1638 t.2 p.429 }

·4 $m \varepsilon N_1 \;.\supset.\; -\exists\, \mathrm{Np}^m \frown \mathrm{Nprf}$

$\mathrm{Nprf} \frown 2N_1 \supset 10N_0+6 \cup 100N_0+28$

$\mathrm{Nprf} \frown 2N_1 - \iota 6 \supset 9N_1+1$

$\mathrm{Nprf} \frown 2N_1 - \iota 28 \supset (7N_1+1) \cup (7N_1-1)$

$\mathrm{Nprf} \frown (10N_1+6) \supset 45N_1+1$

$\mathrm{Nprf} \frown (10N_1+8) \supset 30N_1-2$

$a \varepsilon\, \mathrm{Nprf} \frown (10N_1+8) \;.\supset.\; \mathrm{EX}^{-2} a\, \varepsilon\, 9N_0$

$\mathrm{Nprf} \frown (496+2N_1) \supset (100N_1+16) \cup (100N_1+28) \cup$
$(100N_1+36) \cup (100N_1+56) \cup (100N_1+76)$

$a \varepsilon\, \mathrm{Nprf} \;.\supset.\; \Sigma /[N_1 \frown (a/N_1)] = 2$

·5 $-\exists\, \mathrm{Nprf} \frown N_1^2$ $\qquad -\exists\, \mathrm{Nprf} \frown (105N_1)$

$a \varepsilon\, \mathrm{Nprf} \frown (2N_1) \;.\supset.\; 8a+1\, \varepsilon\, N_1^2$

On ne connaît pas des $\mathrm{Nprf} \frown (2N_1+1)$.

$a \varepsilon\, \mathrm{Nprf} \frown (2N_1+1) \;.\supset.\; \exists (m,p) \ni [m \varepsilon N_0 \,.\, p \varepsilon\, \mathrm{Np} \frown (4N_1+1) \,.$
$a = p^{4m+1} \times (2N_1+1)^2]$ { Lionnet AnnN. a.1879 p.306 }

$a,b \varepsilon\, \mathrm{Np} \frown (2N_1+1) \,.\, m,n \varepsilon N_1 \;.\supset.\; a^m b^n -\varepsilon\, \mathrm{Nprf}$

$a,b,c \varepsilon\, \mathrm{Np} \frown (2N_1+1) \,.\, m,n,p \varepsilon N_1 \;.\supset.\; a^m b^n c^p -\varepsilon\, \mathrm{Nprf}$

§60 ϑ = (fraction propre)

$\mathrm{R} <$ ·0 $\vartheta = \mathrm{R} \cap x \ni (x < 1)$ Df

·01 $\mathrm{R} - \mathrm{N}_1 = \mathrm{N}_0 + \vartheta \quad . \quad 1 - \vartheta = \vartheta \quad . \quad \vartheta = \mathrm{R} \cap (1 - \mathrm{R})$

·1 $\vartheta \times \vartheta = \vartheta$

[$x,y \varepsilon \vartheta . \supset . x < 1 . y < 1 . \supset . xy < 1 . \supset . \vartheta\vartheta \supset \vartheta$ (1)
$x \varepsilon \vartheta . \supset . x < (x+1)/2 < 1 . \supset . x \varepsilon \vartheta\vartheta$ (2) (1) . (2) $. \supset .$ P]

·11 $\vartheta \mathrm{N}_1 = \vartheta \mathrm{R} = \mathrm{R} \quad . \quad \mathrm{R} = \vartheta \cup / \vartheta \cup \iota 1 \quad . \quad \mathrm{R} = \vartheta / \vartheta$

$a,b \varepsilon \mathrm{R} . \supset :$ ·2 $b < a . = . b \varepsilon \vartheta a$

·3 $\vartheta a = \mathrm{R} \cap x \ni (x < a) = \mathrm{R} \cap (a - \mathrm{R})$

·4 $\vartheta a \supset \vartheta b . \supset . a \leqq b$ [Hp $. \supset . b - \varepsilon \vartheta b . \supset . b - \varepsilon \vartheta a . \supset . - (b < a) . \supset .$ Ths]

·5 $\vartheta a = \vartheta b . \supset . a = b$ [Hp . P·4 $. \supset . a \leqq b . b \leqq a . \supset .$ Ths]

·6 $\vartheta(a+b) = \vartheta a + \vartheta b$

[§× P2·02 $. \supset . \vartheta(a+b) \supset \vartheta a + \vartheta b$ (1)
$x \varepsilon \vartheta a . y \varepsilon \vartheta b . \supset . x < a . y < b . \supset . x + y < a + b . \supset . x + y \varepsilon \vartheta(a+b)$ (2)
(2) $. \supset . \vartheta a + \vartheta b \supset \vartheta(a+b)$ (3)
(1) . (3) $. \supset .$ P]

·7 $\vartheta(a \times b) = (\vartheta a) \times (\vartheta b)$ [P·1 $\supset$ P]

$u,v \varepsilon$ Cls'R $. \supset .$ ·8 $\vartheta(u+v) = \vartheta u + \vartheta v$

[§× P3·02 $. \supset . \vartheta(u+v) \supset \vartheta u + \vartheta v$ (1)
$x \varepsilon u . y \varepsilon v . z \varepsilon \vartheta x + \vartheta y$. P·25 $. \supset . z \varepsilon \vartheta(x+y) . \supset . z \varepsilon \vartheta(u+v)$ (2)
(2) . Elim$(x,y) . \supset . \vartheta u + \vartheta v \supset \vartheta(u+v)$ (3)
(1) . (3) $. \supset .$ P]

·81 $\vartheta(uv) = (\vartheta u) \times (\vartheta v)$ [P·1 $\supset$ P]

·9 $m \varepsilon \mathrm{N}_1 + 1 . \supset . \vartheta(\vartheta^m) = \vartheta$

[$x \varepsilon \mathrm{R} . x < 1 . \supset . x \upharpoonright m < 1 : \supset : \vartheta \upharpoonright m \supset \vartheta$ (1)
$z \varepsilon \mathrm{R} . z < 1$. §↾ P22·2 $. \supset . (1-z) \upharpoonright m > 1 - mz$ (2)
$x \varepsilon \mathrm{R} . x < 1 . z = (1-x)/m . \supset . z < 1 . 1 - mz = x$. (2) $. \supset . x < (1-z) \upharpoonright m$ (3)
$x \varepsilon \vartheta$. (3) $. \supset . x \varepsilon \vartheta(\vartheta \upharpoonright m)$ (4) (1) . (4) $. \supset$ P]

Note.

Pour faciliter l'étude des nombres réels nous introduisons d'abord le signe ϑ qui signifie « fraction propre ». En conséquence, si u est une Cls'R, ϑu qu'on pourrait lire « fraction propre de quelque u » a la valeur de l'expression « nombre rationnel plus petit que quelque u ».

§61 l′ = (limite supérieure)

ϑ ✻ 1·0 $u \varepsilon \mathrm{Cls}'\mathrm{R} . \exists \mathrm{R} \frown x \ni (\vartheta x = \vartheta u) . \supset .$

$\mathrm{l}'u = \iota \mathrm{R} \frown x \ni (\vartheta x = \vartheta u)$ = (la limite supérieure des u) Df

Soit donnée une classe u de nombres rationnels positifs. Lorsqu'il y a un nombre rationnel x, qui satisfait à la condition $\vartheta x = \vartheta u$, c'est-à-dire tel que la classe des rationnels plus petits que x coïncide avec la classe des rationnels plus petits que quelque u, nous désignons ce nombre par $\mathrm{l}'u$.

·1 $\mathrm{Hp}·0 . \supset . \mathrm{l}'u \,\varepsilon \mathrm{R} . \vartheta \mathrm{l}'u = \vartheta u$

[$x,y \varepsilon \mathrm{R} . \vartheta x = \vartheta u . \vartheta y = \vartheta u . \S\vartheta \mathrm{P}·24 . \supset . x = y$ (1)

(1) . Hp. $\S\iota$P·1 . ⊃. P]

·2 $a \varepsilon \mathrm{R} . \supset . a = \mathrm{l}'\vartheta a = \mathrm{l}'\iota a$ ·3 $1 = \mathrm{l}'\vartheta$

·4 $u \varepsilon \mathrm{Cls}'\mathrm{R} . a \varepsilon \mathrm{R} . \vartheta a = \vartheta u . \supset . a = \mathrm{l}'u$

·5 $\mathrm{Hp}·0 . y \varepsilon \mathrm{R} . \supset : y < \mathrm{l}'u . = . y \varepsilon \vartheta u$

✻ 2·0 $u \varepsilon \mathrm{Cls}'\mathrm{R} . y \varepsilon \mathrm{R} . \supset : y < \mathrm{l}'u . = . y \varepsilon \vartheta u$ Df Voir 1·5

Par Df, $y < \mathrm{l}'u$ signifie (y est plus petit que quelque u), même lorsque ne sont pas satisfaites les conditions de la P1·5.

Ainsi se présentent les limites supérieures des classes de rationnels, l′ ‘ Cls'R). Si a est une telle limite, et $y \varepsilon$R, la relation $y < a$ a signification. Par cette relation nous allons définir les autres relations et les opérations.

La fonction l′u est ici introduite par abstraction. Nous ne posons pas une égalité de la forme :

($u \,\varepsilon$ Cls'R . ⊃: l′u = expression composée par les signes précédents) Df sauf le cas de la P1·0. Ces limites supérieures sont les nombres réels finis, ou l'infini.

L'objet l′u, introduit par abstraction, et la classe δu, déjà considérée, ont plusieurs propriétés communes (V. P3·0) ; ils diffèrent par la nomenclature.

Sur les formes données par les différents Auteurs à la définition du nombre réel, voir RdM. t.6 p.126-140.

La limite supérieure d'une classe joue un rôle très important dans toute l'Analyse. Elle est appelée « obere Grenze » par Weierstrass et les analystes allemands; Darboux, a.1875 p.61 l'appelle « limite maximum »; Pringsheim, *Encyclopädie*, p. 72, propose de l'appeler « maximum idéal ». Notre dénomination qui se rencontre dans Guilmin a.1847 (voir RdM. t.6 p.137), est conforme à l'usage le plus répandu.

Mittag-Leffler donne aux mots (limite supérieure) une signification différente. Sa lim.sup. coïncide avec notre max Lm, et l′ « oberer Limes » (non Grenze) de Pringsheim, qui regrette la nomenclature non uniforme.

L'idée de la limite supérieure est fort ancienne; car elle est la plus simple des différentes significations du mot «limite». Voir $l_{,}$ λ Λ Lm lim.

P. ex. l'aire du cercle se présente naturellement comme la limite supérieure des aires des polygones inscrits. Voir Stifel a.1544 f.224B.

$a,b,c\,\varepsilon\, l'`(\mathrm{Cls'R})\ .\supset:$

·1 $a=b\ .=.\ \mathrm{R}\frown x\ni(x<a) = \mathrm{R}\frown x\ni(x<b)$ Df {Cfr §ϑ P·5}

·2 $a\leqq b\ .=.$ » $\supset$ » Df { » P·4}

·3 $a>b\ .=.\ -(a\leqq b)$ Df

·31 $c>b\,.\,b>a\ .\supset.\ c>a$ ·32 $a=b\ .\cup.\ a<b\ .\cup.\ a>b$

✻ 3. $u,v\,\varepsilon\,\mathrm{Cls'R}\,.\,a\varepsilon\mathrm{R}\ .\supset:$

·0 $l'u = l'v\ .=.\ \vartheta u = \vartheta v$

·1 $l'u = l'\vartheta u$

·2 $a = l'u\ .=.\ \vartheta a = \vartheta u$ [P1·2 . P3·0 .⊃. P]

·3 $l'u \leqq l'v\ .=.\ l'v \geqq l'u\ .=.\ \vartheta u \supset \vartheta v$

·4 $l'u < l'v\ .=.\ l'v > l'u\ .=.\ \exists\, \vartheta v - \vartheta u$

∞ = (l'infini)

l' ✻ 4·0 $\infty = l'\mathrm{R}$ Df

·1 $l'\mathrm{N}_1 = \infty$ ·2 $u\varepsilon\,\mathrm{Cls'R}\ .\supset.\ l'u \leqq \infty$

·3 $u\varepsilon\,\mathrm{Cls'R}\,.\,\mathrm{R}\supset\vartheta u\ .\supset.\ l'u=\infty$

·4 $u,v\varepsilon\,\mathrm{Cls'R}\,.\,u\supset v\,.\,l'u=\infty\ .\supset.\ l'v=\infty$

·5 » $.\supset:\ l'(u\cup v)=\infty\ .=.\ l'u=\infty\ .\cup.\ l'v=\infty$

On rencontre le signe ∞ dans Wallis a.1655, t.1 p.297.

$l_{,}$ = (limite inférieure)

l' ✻ 5. $u,v\varepsilon\,\mathrm{Cls'R}\,.\,a\varepsilon\mathrm{R}\ .\supset:$ ·0 $l_{,}u = l'\mathrm{R}-(u/\vartheta)$ Df

Nous définissons $l_{,}u$ «la limite inférieure des u» comme la limite supérieure des R qui ne sont pas supérieurs à quelque u.

·1 $\exists\,\mathrm{R}\frown x\ni(x/\vartheta = u/\vartheta)\ .\supset.\ l_{,}u = \iota\,\mathrm{R}\frown x\ni(x/\vartheta = u/\vartheta)$

·11 $a = l_{,}(a/\vartheta) = l_{,}\iota a$ ·12 $1 = l_{,}/\vartheta$

·2 $l_{,}u = l_{,}v\ .=.\ u/\vartheta = v/\vartheta$ ·21 $l_{,}u = l_{,}(u/\vartheta)$

·3 $a = l_{,}u .=.\ a/\vartheta = u/\vartheta$

·4 $l_{,}u > l_{,}v\ .=.\ \exists\,(v/\vartheta)-(u/\vartheta)$ ·41 $a > l_{,}u\ .=.\ a\varepsilon\, u/\vartheta$

·5 $l_{,}u \geqq l_{,}v\ .=.\ u/\vartheta \supset v/\vartheta$

·6 $l'u = l_{,}\,\mathrm{R}-(\vartheta u)$

·7 $l'u = l_{,}v\ .=.\ \vartheta u = \mathrm{R}-(v/\vartheta)\ .=.\ v/\vartheta = \mathrm{R}-(\vartheta u)$

§62 Q = (quantité positive)

R ϑ l' ✻ 1·0 $Q = l'{}'[\text{Cls}'R \frown u \ni (\exists u \,.\, \exists\, R - \vartheta u)]$ Df

Note. Le symbole Q qu'on peut lire « quantité positive », selon Cauchy, indique les limites supérieures des Cls de R, effectivement existantes, et telles que leur limite supérieure ne soit pas l'infini.

Les relations = et > entre Q sont définies dans §l' P2.

·1 $u \varepsilon\, \text{Cls}'R \,.\, \exists u \,.\, \exists\, R - \vartheta u \,.\supset.\, l'u \,\varepsilon Q$ [P·0 .⊃. P]

·2 $R \supset Q$ [§l' P1·2 .⊃. P]

·3 $u \varepsilon\, \text{Cls}'R \,.\, \exists u \,.\supset.\, l'u \;\varepsilon\; Q \smile \iota\infty$ [P·1 . §l' P4·3 .⊃. P]

·4 $u \varepsilon\, \text{Cls}'Q \,.\supset.\, l'u = l'\{R \frown x \ni [\exists\, u \frown y \ni (x < y)]\}$ Df

·5 $a \varepsilon Q \,.\supset.\, \exists R \frown x \ni (x < a) \,.\, \exists R \frown x \ni (x > a)$

Q_0 θ Θ ✻ 2·0 $Q_0 = Q \smile \iota 0$ Df

·1 $\theta = Q \frown x \ni (x < 1)$ Df

·2 $\Theta = Q_0 \frown x \ni (x \leqq 1) = \theta \smile \iota 0 \smile \iota 1$ Df

·3 $\vartheta = R \frown \theta$

+ ✻ 3. $a,b,c,d \varepsilon Q \,.\supset.$

·0 $a+b = l'[R \frown x \ni (x < a) + R \frown x \ni (x < b)]$ Df {Cfr §ϑ P·6}

·1 $a+b\; \varepsilon Q$

·2 $a+b = b+a$

[$R \frown x \ni (x < a) + R \frown x \ni (x < b) = R \frown x \ni (x < b) + R \frown x \ni (x < a) \,.\supset.\, P$]

·3 $a+(b+c) = (a+b)+c$ ·4 $a = b \,.=.\, a+c = b+c$

·5 $(Q \mid N_0)$ §+ P7 ·6 $Q+Q = Q$

·6 $b > a \,.=.\, b \,\varepsilon\, a+Q$ Dfp

·7 $b > a \,.=.\, b+c > a+c$ ·71 $b > a \,.\, d > c \,.\supset.\, b+d > a+c$

·8 $b \geqq a \,.=.\, -(b < a) \,.=.\, b > a \,.\smile.\, b = a \,.=.\, b \,\varepsilon\, a+Q_0$ Dfp

− ✻ 11·0 $a \varepsilon Q \,.\, b \,\varepsilon\, a+Q \,.\supset.\, b - a = \iota\, Q \frown x \ni (a+x = b)$ Df

Hp·0 .⊃. ·1 $b-a\; \varepsilon Q$ ·2 $a+b-a = b$ ·3 $(Q \mid N_0)$ §− 1·3

·4 $1-\theta = \theta$. $1-\Theta = \Theta$

q ✻ 12·0 $q = Q \smile -Q \smile \iota 0$ { = « quantité » } Df

✻ 13-16. $(Q_0, q) \mid (N_0, n)$ §n P3-6

✻ 17. $a,b \varepsilon q \,.\supset.$ ·0 $b > a \,.=.\, b \,\varepsilon\, a+Q$ Df

·1-·2 = P3·7-8 ·3 $b > a \,.=.\, -b < -a$

❊ 18. $u,v \varepsilon \mathrm{Cls'q} \,.\, a \varepsilon \mathrm{q} \,.\supset.$

·0 $a = \mathrm{l}'u \,.=.\, a - \mathrm{Q} = u - \mathrm{Q}$ Df

·01 $a = \mathrm{l}_{,}u \,.=.\, a + \mathrm{Q} = u + \mathrm{Q}$ Df

·02 $a = \mathrm{l}'u \,.=:\, -\exists\, u \frown (a+\mathrm{Q}) : y \varepsilon a - \mathrm{Q} \,.\supset_y.\, \exists\, u \frown (y+\mathrm{Q})$ Dfp

·03 $a = \mathrm{l}_{,}u \,.=:$ » $-$ » $+$ » $-$ Dfp

·04 $+\infty = \mathrm{l}'u \,.=.\, u - \mathrm{Q} = \mathrm{q}$ Df

·05 $-\infty = \mathrm{l}_{,}u \,.=.\, u + \mathrm{Q} = \mathrm{q}$ Df

·06 $+\infty = \mathrm{l}'u \,.=:\, m \varepsilon \mathrm{q} \,.\supset_m.\, \exists\, u \frown (m+\mathrm{Q})$ Dfp

·07 $-\infty = \mathrm{l}_{,}u \,.=:$ » » » $-$ » Dfp

·1 $\exists u \,.\supset.\, \mathrm{l}'u \,\varepsilon\, \mathrm{q} \cup \iota\infty \,.\, \mathrm{l}_{,}u \,\varepsilon\, \mathrm{q} \cup \iota{-\infty}$

·11 $\exists u \,.\, m \varepsilon \mathrm{q} \,.\, u \supset m - \mathrm{Q}_0 \,.\supset.\, \mathrm{l}'u \,\varepsilon\, \mathrm{Q} \,.\, \mathrm{l}'u \leqq m$

·12 » » $+$ $\mathrm{l}_{,}u \,\varepsilon\, m + \mathrm{Q}_0$

·2 $a \varepsilon \mathrm{q} \,.\supset.\, a + \infty = \infty + a = \infty + \infty = \infty \,.\, a - \infty = (-\infty) + a$
$= -\infty - \infty = -\infty \,.\, -\infty < a < +\infty \,.\, -\infty < +\infty$ Df

·3 $\mathrm{l}'u, \mathrm{l}'v \,\varepsilon\, \mathrm{q} \,.\supset.\, \mathrm{l}'(u+v) = \mathrm{l}'u + \mathrm{l}'v$
[Hp . P·0 $.\supset.\, \mathrm{l}'u - \mathrm{Q} = u - \mathrm{Q} \,.\, \mathrm{l}'v - \mathrm{Q} = v - \mathrm{Q}$ (1)
(1) . P3·6 $.\supset.\, \mathrm{l}'u + \mathrm{l}'v - \mathrm{Q} = u + v - \mathrm{Q}$. P·0 $.\supset.$ P]

·31 $\exists u \,.\, \exists v \,.\supset.\, \mathrm{l}'(u+v) = \mathrm{l}'u + \mathrm{l}'v \,.\, \mathrm{l}_{,}(u+v) = \mathrm{l}_{,}u + \mathrm{l}_{,}v$

·4 $\exists u \,.\supset.\, \mathrm{l}'(-u) = -\mathrm{l}_{,}u$

·5 $u \supset v \,.\, \exists u \,.\supset.\, \mathrm{l}'v \geqq \mathrm{l}'u \geqq \mathrm{l}_{,}u \geqq \mathrm{l}_{,}v$

·6 $u \supset v \,.\, \exists u : x \varepsilon v \,.\supset_x.\, \exists\, u \frown (x + \mathrm{Q}_0) :\supset.\, \mathrm{l}'u = \mathrm{l}'v$
— — — — — — — — $\mathrm{l}_{,}u = \mathrm{l}_{,}v$

·7 $u,v \varepsilon \mathrm{Cls'Q_0} \,.\supset:\, \mathrm{l}_{,}(u+v) = 0 \,.=.\, \mathrm{l}_{,}u = 0 \,.\cup.\, \mathrm{l}_{,}v = 0$

❊ 19. $\text{—} \quad \dashv \quad \vdash \quad \vdash\!\dashv$

·0 $a,b \varepsilon \mathrm{q} \,.\, a < b \,.\supset.$

$a \mathbin{\text{—}} b = \mathrm{q} \frown x \ni (a < x < b) = (a+\mathrm{Q}) \frown (b-\mathrm{Q})$ Df

$a \mathbin{\vdash\!\dashv} b =$ » » $\leqq$ » $\leqq$ » $= (a+\mathrm{Q}) \frown (b-\mathrm{Q}_0)$ Df

$a \mathbin{\vdash} b =$ » » $\leqq$ » $<$ » $= (a+\mathrm{Q}_0) \frown (b-\mathrm{Q})$ Df

$a \mathbin{\dashv} b =$ » » $<$ » $\leqq$ » $= (a+\mathrm{Q}) \frown (b-\mathrm{Q}_0)$ Df

$b \mathbin{\text{—}} a = a \mathbin{\text{—}} b \,.\, b \mathbin{\vdash\!\dashv} a = a \mathbin{\vdash\!\dashv} b \,.\, a \mathbin{\vdash\!\dashv} a = \iota a$ Df

·1 $\theta = 0 \mathbin{\text{—}} 1 \,.\, \Theta = 0 \mathbin{\vdash\!\dashv} 1$ Dfp

·2 $a,b \varepsilon \mathrm{q} \,.\supset.\, a \mathbin{\vdash\!\dashv} b = a + \Theta(b-a)$ Dfp

·3 » $.\, a \mathord{-}= b \,.\supset.\, a \mathbin{\text{—}} b = a + \theta(b-a)$ Dfp

Ces notations indiquent les intervalles avec ou sans leurs bornes. Elles seront adoptées dans §cont, §D, §S.

× ❋ 21. $a,b,c \varepsilon Q . \supset :$

·0 $a \times b = \text{l}'[R \frown x \ni (x < a) \times R \frown x \ni (x < b)]$ Df

·1 $a \times b \, \varepsilon Q . ab = ba . a(bc) = (ab)c = abc . a(b+c) = ab+ac$

·2 $Q \times Q = Q . 0 \times 0 = 0 . \Theta\Theta = \Theta$

❋ 22. $a,b,c,d \varepsilon Q . \supset :$

·1 $a > b . = . ac > bc$ ·2 $a > b . c > d . \supset . ac > bd$

·3 $a > b . c > d . \supset . ac+bd > ad+bc$

❋ 23·0 $u \varepsilon \text{Cls}'Q . a \varepsilon Q . \supset : a = \text{l}'u . = . 0a = 0u$ Dfp

·1 $u,v \varepsilon \text{Cls}'Q . \text{l}'u, \text{l}'v \, \varepsilon Q . \supset . \text{l}'(u \times v) = \text{l}'u \times \text{l}'v$

[$0 \, \text{l}'u = 0u . 0 \, \text{l}'v = 0v . \supset . 0 \, \text{l}'u \, \text{l}'v = 0uv . \supset . P$]

·2 $a \varepsilon Q . \supset . a \times \infty = \infty \times a = \infty \times \infty = \infty$ Df

·3 $u,v \varepsilon \text{Cls}'Q . \exists u . \exists v . \supset . \text{l}'(u \times v) = \text{l}'u \times \text{l}'v . \text{l}_{\prime}(u \times v) = \text{l}_{\prime}u \times \text{l}_{\prime}v$

× q ❋ 25-27 = $(Q_0, q)|(N_0, n)$ §× P5-7

28·1 $a,b \varepsilon q . b > a . c \varepsilon Q . \supset . bc > ac$

29·0 $a \varepsilon Q . \supset . a \times (-\infty) = (-\infty) \times a = -\infty$ Df

·1 $u \varepsilon \text{Cls}'q . \exists u . m \varepsilon Q . \supset . \text{l}'(mu) = m \text{l}'u . \text{l}_{\prime}(mu) = m \text{l}_{\prime}u$

/ ❋ 30. $a,b \varepsilon Q . \supset .$ ·0 $/a = \iota \, Q \frown x \ni (x \times a = 1)$ Df

·1 $/a \, \varepsilon Q$ ·2 $/(/a) = a$ ·3 $/(ab) = (/a)(/b)$

·4 $b/a = b \times (/a)$ Df

·5 $a = b . = . /a = /b . = . a/b = 1$

·6 $x \varepsilon Q . ax = b . = . x = b/a$ ·7 $/Q = Q$

·8 $u \varepsilon \text{Cls}'Q . \text{l}'u \, \varepsilon Q . \supset . \text{l}_{\prime}(/u) = /\text{l}'u$

·9 ——————— = ——————— 0

❋ 31. $(Q,q)|(R,r)$ §/ P17 37 40-42

↾ ❋ 41. $a,b \varepsilon Q . m,n \varepsilon N_0 . \supset .$ ·0 $a^m = 1[(\times a)]m$ Df

·01 $a^0 = 1 . a^1 = a$ ·1 $a^m \varepsilon Q$ ·2 $a^m a^n = a^{m+n}$

·3 $(ab)^m = a^m b^m$ ·4 $(a^m)^n = a^{mn}$

·4 $a \varepsilon Q . m \varepsilon N_1 . \supset . a^m = \text{l}'\{[(R \frown x \ni (x < a)]^m\}$ Dfp

·5 $u \varepsilon \text{Cls}'Q . \text{l}'u \, \varepsilon Q . m \varepsilon N_1 . \supset . \text{l}'(u^m) = (\text{l}'u)^m$

·6 ——————— = ∞ ——————— ∞

·7 $m \varepsilon N_1 . \supset . Q^m = Q . 0^m = 0 . \Theta^m = \Theta$

❋ 42. $(Q | N_0)$ §↾ P2-3 5·0 9 14 16

✻ 51. $a\varepsilon Q . b,c\varepsilon q .\supset.$
·1 $b^2-4ac \leq 0 . x\varepsilon q .\supset. ax^2+bx+c \geqq 0$
·2 $b^2-4ac > 0 .\supset. \exists\, q \frown x\ni(ax^2+bx+c<0)$
·3 ———— $.\supset. \exists\, r \frown$ ———— Ex. §vct 9·3

✻ 52·0 $a\varepsilon Q . m\varepsilon N_1 .\supset. a^{-m} = /(a^m)$ Df
$a,b\varepsilon Q . m,n\varepsilon n .\supset.$ ·1 $a^m \varepsilon Q$ ·2-·4 = P41·2-·4
·5 $a^{-m} = /(a^m) = (/a)^m$

√ ✻ 53. $a\varepsilon Q . m,n,p,q\varepsilon N_1 .\supset.$
·0 $\sqrt[m]{a} = \iota\, Q \frown x\ni(x^m=a)$. $\sqrt{a} = \sqrt[2]{a}$. $a \uparrow /m = \sqrt[m]{a}$ Df
·1 $\sqrt[m]{a}\, \varepsilon Q$ ·2 $\sqrt[m]{(a^m)} = a$ ·3 $\sqrt[1]{a} = a$ ·4 $\sqrt[m]{(ab)} = (\sqrt[m]{a})(\sqrt[m]{b})$
·5 $\sqrt[m]{/a} = /\sqrt[m]{a}$ ·6 $\sqrt[m]{(a^n)} = (\sqrt[m]{a})^n$ ·7 $\sqrt[n]{(\sqrt[m]{a})} = \sqrt[mn]{a}$
·8 $\sqrt[mp]{a^{np}} = \sqrt[m]{a^n}$ ·9 $m/n = p/q .\supset. \sqrt[m]{a^n} = \sqrt[p]{a^q}$
| Chuquet f.47: « autāt vault R^2.6 comme R^6.216 ».
» f.48: « R^6.13 qui vault cōme R^2.R^3.13 ». |

Le signe de racine a eu les formes R, r, √. Puisque toute racine est une puissance fractionnaire (P60), nous ne considérons pas le signe √ comme fondamental, et servant à classer les propositions.

La considération des exposants négatifs et fractionnaires est attribuée à Oresme (a. 1323 – 1382) par M. Cantor, t.2, p.133. On la rencontre dans Girard a.1629 fol.B2: « multipliez √5 par rc4 viendra $\left(\frac{1}{6}\right)$2000 ». On remarquera ici que les parenthèses indiquent l'élévation à puissance. Voir aussi: Newton, 13 Junii 1676: §lim P23.

✻ 54. $a,b,c,d\varepsilon R .\supset:$
·1 $a+\sqrt{b} = \sqrt{c} .\supset. b\varepsilon R^2 . c\varepsilon R^2$
| Euclides X P26: *Μέσον μέσου οὐχ ὑπερέχει ῥητῷ.* |

·2 $b \notin R^2 . a+\sqrt{b} = c+\sqrt{d} .\supset. a=c . b=d$
·3 $a/b \notin R^2 . a>b . c>d . \sqrt{a}+\sqrt{b} = \sqrt{c}+\sqrt{d} .\supset. a=c . b=d$
| ·2·3 Euclides X P42:
Ἡ ἐκ δύο ὀνομάτων κατὰ ἓν μόνον σημεῖον διαιρεῖται εἰς τὰ ὀνόματα. |
·4 $a/b \notin R^2 . \sqrt{a}-\sqrt{b} = \sqrt{c}-\sqrt{d} .\supset. a=c . b=d$
| Euclides X P79: *Τῇ ἀποτομῇ μία προσαρμόζει εὐθεῖα ῥητὴ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ.* |
·5 » $.\supset. \sqrt{a}+\sqrt{b} \neq \sqrt{c}-\sqrt{d}$ | Euclides X P111:
Ἡ ἀποτομὴ οὐκ ἔστιν ἡ αὐτὴ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων. |
·6 $a,b\varepsilon Q .\supset. \sqrt{(a+b)} < \sqrt{a}+\sqrt{b}$. $(a+b)/2 \geqq \sqrt{(ab)}$

❋ 55. $a,b \varepsilon Q .\supset:$ ·1 $a > b .\supset. \sqrt{(a-b)} > \sqrt{a} - \sqrt{b}$

·2 $\sqrt{(a+b)} > \sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt[4]{(ab/4)}$

·3 $a > b .\supset. (a-b)^2/(8b) < (a+b)/2 - \sqrt{(ab)} < (a-b)^2/(8a)$

[$(a+b)/2 - \sqrt{(ab)} = (a-b)^2/[2(a+b+2\sqrt{(ab)})]$]

·4 $a^2 - b\, \varepsilon Q .\supset. \sqrt{(a+\sqrt{b})} = \sqrt{\{[a+\sqrt{(a^2-b)}]/2\}} + \sqrt{\{[a-\sqrt{(a^2-b)}]/2\}}$

» — » — »

{ EUCLIDES X P54-59, 91-96 }

·5 $8a - b\, \varepsilon Q .\supset.$

$\sqrt[3]{\{a+(b+a)\sqrt{[(8a-b)/(27b)]}\}} + \sqrt[3]{[a-(b+a)\sqrt{[(8a-b)/(27b)]}]} = \sqrt[3]{b}$

·6 $a - b\, \varepsilon Q .\supset.$

$\sqrt[4]{\{[2a-b+2\sqrt{[a(a-b)]}]/4\}} + \sqrt[4]{\{[2a-b-2\sqrt{[a(a-b)]}]\}} = \sqrt{(\sqrt{a}+\sqrt{b})}$

·7 $a \varepsilon q \,.\, b \varepsilon Q .\supset.$

$\sqrt[3]{[a^3+3ab+(3a^2+b)\sqrt{b}]} + \sqrt[3]{[a^3+3ab-(3a^2+b)\sqrt{b}} = 2a$

·8 $x \varepsilon Q - N_1^2 .\supset. \sqrt{x} - [x-(E\sqrt{x})^2]/(2E\sqrt{x}+1)\ \varepsilon\ \theta/[4(2E\sqrt{x}+1)]$

{DARBOUX, *Sur l'extraction de la racine carrée*, BD. a.1887 p.176}

·9 $n \varepsilon N_1 \,.\, x \varepsilon Q .\supset. E(\sqrt[n]{x}) = \imath N_0 \cap z \ni [z \leqq x < (z+1)^n]$ Dfp

» $E(\sqrt[n]{x}) = E(\sqrt[n]{Ex})$

❋ 56. $a,b,c \varepsilon q .\supset.$ ·0 $x = a \pm b .=. x = a+b .\cup. x = a-b$ Df

·1 $a^2 - b\, \varepsilon Q_0 .\supset:$ $x \varepsilon q \,.\, x^2+2ax+b=0 .=. x = -a \pm \sqrt{(a^2-b)}$

·11 $a^2 - b\, \varepsilon -Q .\supset. -\exists\, q \cap x \ni($ » $)$

[Hp $.\supset: x^2+2ax+b=0 .=. (x+a)^2 = a^2-b :\supset.$ Ths]

{ EUCLIDES VI P28, 29 }

{ LEONARDUS PISANUS a.1202 p.407 :

« (Si) volueris invenire quantitatem census [x^2], qui cum datis radicibus [$+2ax$] equetur numero dato [$= -b$], sic facias: accipe quadratum medietatis radicum [a^2], et adde eum super numerum datum [a^2-b]; et eius, quod provenerit, radicem accipe [$\sqrt{(a^2-b)}$]; de qua numerum medietatis radicum tolle [$\sqrt{(a^2-b)}-a$]; et quod remanserit erit radix quesiti census ».

·2 $a -= 0 \,.\, b^2-4ac\, \varepsilon Q_0 .\supset:$

$x \varepsilon q \,.\, ax^2+bx+c=0 .=. x = [-b \pm \sqrt{(b^2-4ac)}]/(2a)$

·21 $b^2-4ac\, \varepsilon -Q .\supset. -\exists\, q \cap x \ni (ax^2+bx+c=0)$

{ BRAHMAGOUPTA, Version de Rodet p. 75 :

« Mets le nombre connu dans le côté opposé à celui où sont... l'inconnue et son carré. Au nombre connu, multiplié par quatre fois le nombre des x^2 ajoute le carré du coefficient du terme moyen; la racine de ceci, moins le coefficient du terme moyen, étant divisée par deux fois le nombre des carrés est la valeur de x »}

·3 $a,b \varepsilon Q . \supset . a(a-b) = b^2 .=. b = a(\sqrt{5}-1)/2 .=. a = b(\sqrt{5}+1)/2 .=.$
$a^2+(a-b)^2 = 3b^2 .=. b(a+b) = a^2 .=. a-b = a(3-\sqrt{5})/2$
{ EUCLIDES XIII P1-6 }

Ces formules correspondent à la division de a en « moyenne et extrême raison » « ἄκρον καὶ μέσον λόγον ».

※ 57. $a,b,x,y \varepsilon q . \supset :$
·1 $x+y = 2a . xy = b .=. x+y = 2a . (x+y)^2-4xy = 4(a^2-b)$
$.=.$ » $(x-y)^2 = 4(a^2-b)$
$.=.$ » $x-y = \pm 2\sqrt{(a^2-b)}$
$.=. x = a+\sqrt{(a^2-b)} . y = a-\sqrt{(a^2-b)} .\cup.$
$x = a-$ » $y = a+$ »
{ DIOPHANTUS I P27, 30 }

·2 $x+y = a . x^2+y^2 = b^2 .=. x+y = a . x-y = \pm\sqrt{(2b^2-a^2)}$
{ DIOPHANTUS I P28 }

·3 $x^2+y^2 = a . xy = b .=. x+y = \pm\sqrt{(a+2b)} . x-y = \pm\sqrt{(a-2b)}$
{ BACHET, *Commentaria in Diophantum*, I, 33 quæstio I. }

·4 $x^3+y^3 = a . x+y = b .=. x+y = b . 3b(x-y)^2 = 4a-8b^3$
{ DIOPHANTUS IV P1 }

·5 $x^4+y^4 = a . x+y = b .=. x+y = b . 2(xy)^2-4b^2xy+b^4-a = 0$

·6 $x^5+y^5 = a . x+y = b .=. x+y = b . 5bxy(b^2-xy) = b^5-a$

※ 58·1 $a,b,u,v \varepsilon Q . u+v = b . uv = (a/3)^3 . \supset :$
$x \varepsilon Q . x^3 = ax+b .=. x = \sqrt[3]{u}+\sqrt[3]{v}$ [§√ P2·11 ⊃ P]
{ N. TARTAGLIA a.1546 p.123:
... Quando che'l cubo restasse lui solo [$x^3 = ax+b$]
Tu osseruarai quest'altri contratti.
Del numer farai due tal part'a volo [$b = u+v$]
Che l'una in l'altra si produca schietto
El terzo cubo delle cose in stolo. [$uv = (a/3)^3$]
Delle qual poi, per commun precetto
Torrai li lati cubi insieme gionti
Et cotal summa sarà il tuo concetto. [$x = \sqrt[3]{u}+\sqrt[3]{v}$]
... Questi trovai, et non con passi tardi
Nel mille cinquecent'e quatro e trenta
Con fondamenti ben sald'e gagliardi
Nella città dal mar'intorno centa. }

$a,b\varepsilon \mathrm{q} \,.\supset\therefore$ ·2 $b^2+a^3>0 \,.\supset:$
$x\varepsilon \mathrm{q} \,.\, x^3+3ax+2b=0 \,.=.\, x=\sqrt[3]{[-b+\sqrt{(b^2+a^3)}]}+\sqrt[3]{[-b-\sqrt{(b^3+a^3)}]}$
·3 $b^3+a^3=0 \,.\supset.\, \mathrm{q}\frown x \ni (x^3+3ax+2b=0) = \iota(\sqrt[3]{b}) \cup \iota(-2\sqrt[3]{b})$
·4 $b^2+a^3<0 \,.\supset.\, \mathrm{Num}[\mathrm{q}\frown x\ni(x^3+3ax+2b=0)]=3$

Continuation §sin P10·1

* 60·01 $a\varepsilon \mathrm{Q} \,.\, m\varepsilon \mathrm{R} \,.\supset.$
$a\uparrow m = \iota\, y\ni[\, p,q\varepsilon \mathrm{N}_1 \,.\, m=p/q \,.\supset_{p,q} .\, y=(a\uparrow p)\uparrow/q\,]$ Df
·02 $a\varepsilon\, 1+\mathrm{Q} \,.\, m\varepsilon \mathrm{Q} \,.\supset.\, a\uparrow m = \mathrm{l}'\{a\uparrow[\mathrm{R}\frown x\ni(x<m)]\}$ Df
·03 $a\ \varepsilon\ \theta$. ——————— $\mathrm{l}_{\prime}$ ——————— Df
·04 $a^{-m} = /(a^m)$ Df

$a,b,c\varepsilon \mathrm{Q} \,.\, m,n\varepsilon \mathrm{q} \,.\supset.\, 1^m=1 \,.\, a\uparrow m\ \varepsilon\ \mathrm{Q}$. P41·2-·4
·5 $a>b \,.=.\, a^c>b^c$ ·6 $a>1 \,.\supset:\, m>n \,.=.\, a^m>a^n$
·7 $a<1 \,.\supset:\, m>n \,.=.\, a^m<a^n$

* 61. $m,n,x,y\varepsilon \mathrm{Q} \,.\, x -= y \,.\supset.$
·1 $x^m y^n < [(mx+ny)/(m+n)]^{m+n}$
·2 $(1+/m)^m < [1+/(m+n)]^{m+n}$ [$(1+/m, 1)|(x, y)$P·1 $.\supset.$ P]
·3 $m<n \,.\supset.\, (1+/m)^m<(1+/n)^n$ [$(n-m)|n$P·2 $.\supset.$ P]
·4 $m<n \,.\supset.\, (1+x/m)^m<(1+x/n)^n$
[$(m/x, n/x)|(m, n)$P·3 $\supset$ P] [P·4 . $x=1 \,.\supset.$ P·3]

·5 $m<1 \,.\supset.\, (1+x)^m<1+mx$ [$(mx, 1)|(x, n)$P·4 $.\supset.$ P]
·6 $m>1 \,.\supset.\, (1+x)^m>1+mx$ [$(1, m, mx)|(m, n, x)$P·4 $.\supset.$ P]
DemP·5 [$(1/m, mx)|(m,x)$P·6 $.\supset.$ P·5]
DemP·4 [$(n/m, x/n)|(m,x)$P·6 $.\supset.$ P·4]

·7 $(1+/m)^m < (1+/n)^{n+1}$
[$[n+1, (m+1)/m, n/(n+1)]|(n, x, y)$ P·1 $.\supset.$ P] Ex : §e

Num Q * 70·1 $\mathrm{Num\,Q} > \mathrm{Num\,N}_0$
·2 $u\varepsilon \mathrm{Cls}'\mathrm{q} \,.\, \mathrm{Num}\,u = \mathrm{Num}\mathrm{N}_0 \,.\, a,b\varepsilon\, \mathrm{q} \,.\, a<b \,.\supset.\, \exists\, (a \mapsto b) - u$
{ G. Cantor JfM. a.1874 p.258 ; AM. a.1883 p.308 {
·3 $\mathrm{Num\,Q} = \mathrm{Num\,q} = \mathrm{Num}\,\Theta = \mathrm{Num}\,(\Theta - \mathrm{R})$
{ G. Cantor JfM. a.1877 p.242 ; AM. a.1883 p.316 {

Σ Π ! C (Q, q) | (R, r) §Σ P1. 6. 20. §Π P1. 2. 5·1 10. §!

mod * 80. $a,b\varepsilon \mathrm{q} \,.\supset.$
·0 $\mathrm{mod}\,a = \iota\, \mathrm{Q}_0\frown x\ni(a=+x \,.\cup.\, a=-x)$
·1 $\mathrm{mod}\,a\ \varepsilon \mathrm{Q}_0$ ·2 $\mathrm{mod}(a+b) \leqq \mathrm{mod}\,a+\mathrm{mod}\,b$
·3 $\mathrm{mod}(-a) = \mathrm{mod}\,a$ ·4 $\mathrm{mod}(a\times b) = \mathrm{mod}\,a\times\mathrm{mod}\,b$

·5 $a-=0 .\supset. \mathrm{mod}/a = /\mathrm{mod}a$

·6 $m\varepsilon N_1 .\supset. \mathrm{mod}(a^m) = (\mathrm{mod}a)^m$ ·7 $\mathrm{mod}a = \sqrt{a^2}$

·8 $m\varepsilon N_1 . f\varepsilon \mathrm{qF}1\cdots m .\supset. \mathrm{mod}\Sigma f \leqq \Sigma\mathrm{mod}f$

·9 ———————— $.\supset. \mathrm{mod}\Pi f = \Pi\mathrm{mod}f$

sgn ✻ 81. (Q,q)|(R,r) §sgn P·0-·8

max min ✻ 82. (Q | R) §max P3·1-·6

$u,v\varepsilon \mathrm{Cls'Q} .\supset.$

·7 $\exists\, \iota\, \mathrm{max}u .\supset. \mathrm{max}u = \mathrm{l}'u$ ·71 $\mathrm{l}'u\, \varepsilon u .\supset. \mathrm{l}'u = \mathrm{max}u$

·8 $\mathrm{l}'u, \mathrm{l}'v\, \varepsilon \mathrm{Q} .\supset. \mathrm{l}'(u\cup v) = \mathrm{max}(\iota\mathrm{l}'u \cup \iota\mathrm{l}'v)$

✻ 83. $u,v\varepsilon \mathrm{Cls'q} . a,b\varepsilon \mathrm{q} .\supset.$

·0 $\mathrm{max}u = \imath\, u \frown x\ni(y\varepsilon u .\supset_y. y\leqq x)$ Df

·01 $\mathrm{min}u =$ ——————————$\geqq x)$ Df

$\exists\,\iota\,\mathrm{max}u . \exists\,\iota\,\mathrm{max}v .\supset.$ ·1 $\mathrm{max}(u\cup v) = \mathrm{max}(\iota\,\mathrm{max}u \cup \iota\,\mathrm{max}v)$

·2 $\mathrm{max}(u+v) = \mathrm{max}u + \mathrm{max}v$

·11-·22 (min | max) P·1-·2 ·3 $\mathrm{min}(-u) = -\mathrm{max}u$

·5 $a\varepsilon \mathrm{Q} . b,c\varepsilon \mathrm{q} .\supset. \mathrm{min}[(ax^2+bx+c)|x\, \text{‘q}] =$
$[(ax^2+bx+c)\,|x]\,[-b/(2a)] = (4ac-b^2)/(4a)$

·6 $\mathrm{Num}u\, \varepsilon N_1 .\supset. \exists\,\iota\,\mathrm{max}u . \exists\,\iota\,\mathrm{min}u$

·7 $u\varepsilon \mathrm{Cls'}(\mathrm{q} \cup \iota\infty \cup \iota -\infty) .\supset.$ P·0

·8 $\exists\,\iota\mathrm{max}u .\supset. \mathrm{max}u = \mathrm{l}'u : \exists\,\iota\mathrm{min}u .\supset. \mathrm{min}u = \mathrm{l}_, u$

·81 $\mathrm{l}'u\, \varepsilon u .\supset. \mathrm{l}'u = \mathrm{max}u : \mathrm{l}_, u\, \varepsilon u .\supset. \mathrm{l}_, u = \mathrm{min}u$

·9 $\mathrm{l}'u, \mathrm{l}'v\, \varepsilon \mathrm{q} .\supset. \mathrm{l}'(u\cup v) = \mathrm{max}(\iota\mathrm{l}'u \cup \iota\mathrm{l}'v)$

·91 $\mathrm{l}_, u, \mathrm{l}_, v\, \varepsilon \mathrm{q} .\supset. \mathrm{l}_,(u\cup v) = \mathrm{min}(\iota\mathrm{l}_, u \cup \iota\mathrm{l}_, v)$

E β 84. (q | r) §E §β

·1 $x\varepsilon \mathrm{Q} .\supset: x\varepsilon \mathrm{R} .=. \exists N_1 \frown n\ni[(/\beta)^n x\, \varepsilon N_1]$ | Euclides X P2:
Ἐὰν δύο μεγεθῶν ἀνίσων ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος τὸ καταλειπόμενον μηδέποτε καταμετρῇ τὸ πρὸ ἑαυτοῦ, ἀσύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη. |

·2 $x\varepsilon \mathrm{Q} .\supset: x\varepsilon \mathrm{R} \pm \sqrt{\mathrm{R}} .=.$
$\exists\, (m,n)\ni[m,n\varepsilon N_1 : p\varepsilon m+N_1 .\supset_p. \mathrm{E}(/\beta)^p x = \mathrm{E}(/\beta)^{p+n} x]$
| Euler a.1737 PetrC. t.9 p.98 |

$(/\beta)^n\, x$ est le « n-ième quotient complet du développement de x en fraction continue »; $\mathrm{E}(/\beta)^n\, x$ est le n-ième quotient incomplet.

Les Df de Log, Med, λ, cres, q_n sont composées par les seuls signes précédents.

§63 Log

$\upharpoonleft \mathrm{q} \quad a,b \varepsilon \mathrm{Q}{-}\iota 1 \,.\, x,y \varepsilon \mathrm{Q} \,.\, m \varepsilon \mathrm{q} \;.\supset.$

·0 ${}^a\mathrm{Log}x = \iota\, \mathrm{q} \frown z \ni (a \upharpoonleft z = x)$ Df

·1 ${}^a\mathrm{Log}x \;\varepsilon \mathrm{q}$ ·2 $a \upharpoonleft ({}^a\mathrm{Log}x) = x$

·21 ${}^a\mathrm{Log}(a \upharpoonleft m) = m$ ·22 ${}^a\mathrm{Log}1 = 0$ ·23 ${}^a\mathrm{Log}a = 1$

·3 ${}^a\mathrm{Log}(xy) = {}^a\mathrm{Log}x + {}^a\mathrm{Log}y$

[P·2 $.\supset.$ ${}^a\mathrm{Log}(xy) = {}^a\mathrm{Log}[a \upharpoonleft ({}^a\mathrm{Log}x) \times a \upharpoonleft {}^a\mathrm{Log}y)]$
§Q 60·2 » $= {}^a\mathrm{Log}[a \upharpoonleft ({}^a\mathrm{Log}x + {}^a\mathrm{Log}y)]$
P·21 » $= {}^a\mathrm{Log}x + {}^a\mathrm{Log}y$]

·4 ${}^a\mathrm{Log}/x = - {}^a\mathrm{Log}x$

[${}^a\mathrm{Log}/x = {}^a\mathrm{Log}/[a \upharpoonleft ({}^a\mathrm{Log}x)] = {}^a\mathrm{Log}[a \upharpoonleft (- {}^a\mathrm{Log}x)] = - {}^a\mathrm{Log}x$]

·5 ${}^a\mathrm{Log}\, x^m = m \times {}^a\mathrm{Log}x$

[${}^a\mathrm{Log}(x^m) = {}^a\mathrm{Log}[(a \upharpoonleft {}^a\mathrm{Log}x)^m] = {}^a\mathrm{Log}[a \upharpoonleft m \times {}^a\mathrm{Log}x)] = m \times {}^a\mathrm{Log}x$]

·6 ${}^a\mathrm{Log}b \times {}^b\mathrm{Log}a = 1$ ·7 ${}^a\mathrm{Log}x = {}^b\mathrm{Log}x \times {}^a\mathrm{Log}b$

{ NEPERUS a.1614 p.20:

« Ex his praelibatis judicent eruditi quantum emolumenti adferent illis logarithmi: quandoquidem per eorum additionem multiplicatio, per substractionem divisio, per bipartitionem extractio quadrata, per tripartitionem cubica, et per alias faciles prostaphaereses omnia graviora calculi opera evitantur. » }

Note. Soit a une raison; Euclide appelle $a^2, a^3 \ldots$ la raison doublée, triplée... *διπλασίων, τριπλασίων... λόγος.*

Dans a^n, n est l'exposant de la raison, *λόγου ἀριθμός*; d'où le mot « logarithmus », introduit par Neper. Les logarithmes de Neper sont liés aux logarithmes naturels par la relation:

$$\log \mathrm{nep}\, x = -10^7 \log(10^{-7}x),$$

c'est-à-dire il n'a pas écrit notre virgule décimale; mais les chiffres sont les mêmes.

§64 Med = (moyen)

$<$ l′ l, ❋ 1. $u,v \varepsilon$ Cls'q .⊃.

·0 Med$u$ = q ⌒ $x \ni$ (l,$u \leqq x \leqq$ l′u) Df

Note. Med$u$ signifie « nombre moyen (*medius*) entre les u ». Le signe « Med » sous la forme « M » a été introduit par Cauchy a.1821 p.29 (Cfr, §Lm 1·0). Dans F_1 on a considéré deux autres classes de nombres moyens, dont nous donnons seulement les définitions :

·01 Med′u = q ⌒ $x \ni$ ∃(y,z)$\ni$($y,z \varepsilon u$. $y \leqq x \leqq z$) Df

·02 Med″u = ——————— - ——<—<— Df

= q ⌒ $x \ni$ (l,$u < x <$ l′u) Dfp

Si la classe u contient sont maximum et son minimum, on a Med′u = Med$u$; s'ils manquent tous les deux, Med′u = Med″u.

Parmi ces classes de nombres moyens, la Med$u$ est la plus importante notamment dans l'intégration.

On dit que la classe u est *convexe*, si Med$u$ = u. Voir §q_n P4.

·1 Med$u$ ε Cls'q ·2 Med Med$u$ = Med$u$

·3 l′ Med$u$ = l′ u . l,Med$u$ = l,u

·4 v ⊃ u .⊃. Med$v$ ⊃ Med$u$

·5 Med$u$ = u . Med$v$ = v .⊃. Med(u ⌒ v) = u ⌒ v

·6 $a,b \varepsilon$ q .⊃. Med(ιa ∪ ιb) = a ‾ b

❋ 2.

+ ·1 $u \varepsilon$ Cls'q . $a \varepsilon$ q .⊃. Med($a+u$) = $a+$Med$u$

− ·2 ——— .⊃. Med($-u$) = $-$Med$u$

× ·3 $u \varepsilon$ Cls'q . $a \varepsilon$ q .⊃. Med au = aMed$u$

/ ·4 $u \varepsilon$ Cls'Q .⊃. Med/u = /Med$u$

·41 $x,y \varepsilon u$. $p,q \varepsilon$ Q .⊃. $(px+qy)/(p+q)$ ε Med$u$

↾ ·5 $u \varepsilon$ Cls'Q . $a \varepsilon$ q .⊃. Med(u↾a) = (Med$u$)↾a

·6 $a \varepsilon$ Q . $u \varepsilon$ Cls'q .⊃. Med(a↾u) = a↾(Med$u$)

{ ·3·5·6 Cauchy a.1821 p.365-367 }

❋ 3. $n \varepsilon N_1$. $x \varepsilon$ qf 1⋯n . $a,b \varepsilon$ Qf 1⋯n .⊃.

Σ ·1 [Σ(x,1⋯n)]/n ε Med x‘(1⋯n)

·2 Σ(a×x, 1⋯n) / Σ(a, 1⋯n) ε Med x‘(1⋯n)

·3 Σ(x,1⋯n) / Σ(a,1⋯n) ε Med (x/a)‘(1⋯n)

·4 Σ(b×x, 1⋯n)/Σ(b×a, 1⋯n) ε Med (x/a)‘(1⋯n)

Π ·5 $\sqrt[n]{\Pi(a,1\cdots n)}\ \varepsilon\ \mathrm{Med}\, a'(1\cdots n)$

·6 $\Pi(a\upharpoonright b,1\cdots n)\upharpoonright/\Sigma(b,1\cdots n)\ \varepsilon\ \mathrm{Med}\, a'(1\cdots n)$

{ P·1-·6 CAUCHY a.1821 p.29 }

·7 $\sqrt{[\Sigma(a^2, 1\cdots n)/n]}\ \varepsilon\ \mathrm{Med}\, a'(1\cdots n)$ { CAUCHY a.1821 p.371 }

Le premier membre de la P·1 est la « moyenne arithmétique des valeurs de x ». Dans la P·2 ces valeurs ont des coefficients a. Dans les P·5·6 figure la « moyenne géométrique », et dans la ·7 la « moyenne quadratique ».

Log ✻ 4. $a\varepsilon\, \mathrm{Q}\text{-}\iota 1\ .\ u\varepsilon\, \mathrm{Cls'Q}\ .\supset.\ \mathrm{Med}\ {}^a\mathrm{Log}\,u = {}^a\mathrm{Log}\,\mathrm{Med}\,u$

{ CAUCHY a.1821 p.367 }

Continuation : §λ P2·9 §ƒres ·92 §S P1·0 3·5 §q_n P5 33 42.

§65 λ = (classe limite)

— mod l, ✻ 1. $u,v\varepsilon\, \mathrm{Cls'q}\ .\supset.$

·0 $\lambda u = \mathrm{q} \frown x\ni[\, \mathrm{l}_{,}\, \mathrm{mod}(u-x) = 0\,]$ Df

·01 $x\varepsilon\, \lambda u\ .=:\ x\varepsilon \mathrm{q}\ :\ h\varepsilon \mathrm{Q}\ .\supset_h.\ \exists\, u \frown y\ni[\, \mathrm{mod}(y-x) < h\,]$ [= P·0]

P1·0 « Soit u une classe de quantités. Par λu nous désignons la classe des nombres x tels que la limite inférieure des modules des différences entre x et les nombres de la classe u soit nulle. La P·01 exprime la même Df, où le signe l, est remplacé par sa valeur. La classe λu, qu'on peut lire « les limites des u », ou « la classe limite des u » a été indiquée dans F1895 et dans plusieurs autres travaux par Cu.

·1 $u \supset \lambda u$

[$x\varepsilon u\ .\supset.\ 0\varepsilon\, u-x\ .\supset.\ 0\varepsilon\, \mathrm{mod}(u-x)\ .\supset.\ \mathrm{l}_{,}\mathrm{mod}(u-x) = 0\ .\supset.\ x\varepsilon\, \lambda u$]

·2 $\lambda\lambda u = \lambda u$

[$(\lambda u \mid u)$P·1 $.\supset.\ \lambda u \supset \lambda\lambda u$ (1)

$x\varepsilon\, \lambda\lambda u\ .\ h\varepsilon \mathrm{Q}\ .$ P·01 $.\supset.\ \exists\, \lambda u \frown y\ni[\, \mathrm{mod}(y-x) < h/2\,]$ (2)

Hp(2) $.\ y\varepsilon\, \lambda u\ .\supset.\ \exists\, u \frown z\ni[\, \mathrm{mod}(z-y) < h/2\,]$ (3)

Hp(3) $.\ \mathrm{mod}(y-x) < h/2\ .\ z\varepsilon u\ .\ \mathrm{mod}(z-y) < h/2\ .\supset.\ \mathrm{mod}(z-x) < h$ (4)

Hp(4) $.\supset.\ \exists\, u \frown z\ni[\, \mathrm{mod}(z-x) < h\,]$ (5)

$x\varepsilon\, \lambda\lambda u\ .\ h\varepsilon \mathrm{Q}\ .$ (5) Elim(y,z) . (2).(3) $.\supset.\ \exists\, u \frown z\ni[\, \mathrm{mod}(z-x) < h\,]$ (6)

$x\varepsilon\, \lambda\lambda u\ .$ (6) Export $.\supset.\ x\varepsilon\, \lambda u$ (7)

(1).(7) $.\supset.$ P]

·3 $\lambda(u \cup v) = (\lambda u \cup \lambda v)$ { Distrib$(\lambda,\cup)$ }

[Df λ $.\supset.\ \lambda(u\cup v) = \mathrm{q} \frown x\ni\{\, \mathrm{l}_{,}\mathrm{mod}[(u\cup v)-x] = 0\,\}$

Distrib$(',\cup)$ $.\supset.$ » $= \mathrm{q} \frown x\ni\{\, \mathrm{l}_{,}[\mathrm{mod}(u-x) \cup \mathrm{mod}(v-x)] = 0\,\}$

§Q 18·7 $.\supset.$ » $= \mathrm{q} \frown x\ni\{\, \mathrm{l}_{,}\mathrm{mod}(u-x) = 0\ .\cup.\ \mathrm{l}_{,}\mathrm{mod}(v-x) = 0\,\}$

Df λ $.\supset.$ » $= \lambda u \cup \lambda v$]

·31 $u \supset v\ .\supset.\ \lambda u \supset \lambda v$

[Hp . §$\cup$ P2·4 $.\supset.\ v = u\cup v\ .$ P·3 $.\supset.\ \lambda v = \lambda u \cup \lambda v\ .\supset.$ Ths]

·32 $\lambda(u \cap v) \supset \lambda u \cap \lambda v$

[$u \cap v \supset u \,.\, u \cap v \supset v$. P·31 $.\supset.$ $\lambda(u \cap v) \supset \lambda u \,.\, \lambda(u \cap v) \supset \lambda v$. Cmp $.\supset.$ P]

·33 $\lambda u = u \,.\, \lambda v = v \,.\supset.\, \lambda(u \cap v) = u \cap v$

[Hp. P·32 . P·1 $.\supset.$ $\lambda(u \cap v) \supset u \cap v \,.\, u \cap v \supset \lambda(u \cap v)$ $.\supset.$ Ths]

·4 $\lambda \mathrm{R} = \mathrm{Q}_0 \,.\, \lambda \mathrm{r} = \mathrm{q} \,.\, \lambda\vartheta = \lambda\theta = \Theta$

·5 $\lambda/\mathrm{N}_1 = /\mathrm{N}_1 \cup \iota 0 \,.\, \lambda(/\mathrm{N}_1 + /\mathrm{N}_1) = (\mathrm{N}_1 + /\mathrm{N}_1) \cup \iota 0$

·6 $a,b \varepsilon \mathrm{q} \,.\, a < b \,.\supset.\, \lambda(a \frown b) = a \dashv b$

✻ 2. $u,v \varepsilon \mathrm{Cls'q} \,.\supset:$

$+$ ·1 $\lambda u + \lambda v \supset \lambda(u+v)$ $\{$ Distrib$(\lambda,+)$ $\}$

[§+P7·3 $.\supset:$ $a \varepsilon \lambda u + \lambda v \,.=.\, \exists(b;c) \ni (b \varepsilon \lambda u \,.\, c \varepsilon \lambda v \,.\, b+c = a)$

Df λ $.\supset:$ » $.=.$ » $[\mathrm{l}_{,}\mathrm{m}(u-b) = 0 \,.\, \mathrm{l}_{,}\mathrm{m}(v-c) = 0 \,.\, b+c = a]$

§Q P18·31 $.\supset:$ $.\supset.$ » $[\mathrm{l}_{,}\mathrm{mod}(u+v-b-c) = 0 \,.\, b+c = a]$

» $.\supset.$ $\mathrm{l}_{,}\mathrm{mod}(u+v-a) = 0$. Df λ $.\supset.$ $a \varepsilon \lambda(u+v)$]

·11 $u,v \varepsilon \mathrm{Cls'q} \,.\, a \varepsilon \mathrm{q} \,.\supset.\, \lambda(a+u) = a + \lambda u$ ·31 $\lambda(au) = a\lambda u$

·12 $\mathrm{l'mod}\, u, \mathrm{l'mod}\, v \,\varepsilon\, \mathrm{Q} \,.\supset.\, \lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$

$-$ ·2 $\lambda(-u) = -\lambda u$

$\times$ $/$ ·3 $\lambda u \times \lambda v \supset \lambda(u \times v)$ ·4 $0 -\varepsilon \lambda u \,.\, \mathrm{l'mod}\, u \,\varepsilon \mathrm{Q} \,.\supset.\, \lambda/u = /\lambda u$

$\uparrow$ ·5 $m \varepsilon \mathrm{N}_1 \,.\supset.\, \lambda(u^m) = (\lambda u)^m$

Num ·6 $\mathrm{Num}\, u \,\varepsilon \mathrm{N}_0 \,.\supset.\, \lambda u = u$

max ·7 $\mathrm{l'}u \,\varepsilon \mathrm{q} \,.\supset.\, \mathrm{l'}u = \max \lambda u$: $\mathrm{l}_{,}u \,\varepsilon \mathrm{q} \,.\supset.\, \mathrm{l}_{,}u = \min \lambda u$

∞ ·8 $\mathrm{l'}u = \infty \,.=.\, \mathrm{l'}\lambda u = \infty$: $\mathrm{l}_{,}u = -\infty \,.=.\, \mathrm{l}_{,}\lambda u = -\infty$

Med ·9 $\lambda\, \mathrm{Med}\, u = \mathrm{Med}\, u$

Λ = (limite généralisée)

λ ✻ 3. $u \varepsilon \mathrm{Cls'q} \,.\supset.$

·0 $\infty \,\varepsilon\, \Lambda u \,.=.\, \mathrm{l'}u = \infty \,.\, -\infty \,\varepsilon\, \Lambda u \,.=.\, \mathrm{l}_{,}u = -\infty$ Df

·1 $\Lambda u = \lambda u \cup (\iota\infty) \cap (\Lambda u) \cup (\iota -\infty) \cap (\Lambda u)$ Df

·2 $\lambda u = \mathrm{q} \cap \Lambda u$

·3 $u,v \varepsilon \mathrm{Cls'q} \,.\supset.\, \Lambda(u \cup v) = \Lambda u \cup \Lambda v$ $\{$ Distrib$(\Lambda,\cup)$ $\}$

·31 » $.\, u \supset v \,.\supset.\, \Lambda u \supset \Lambda v$

·4 $a \varepsilon \mathrm{q} \,.\supset.\, \Lambda(a+u) = a + \Lambda u$

Note. La classe Λu est formée de la classe λu, et de l' ∞ et du $-\infty$, lorsqu'ils sont la limite supérieure, ou inférieure, des u. On peut lire Λu par « limite généralisée des u ».

Continuation §δ, §Lm, §q_n P11, §vct P10.

§66 δ = (dérivé)

✱ 1. $u,v \varepsilon$ Cls'q .⊃. ·0 $\delta u = q \frown x \ni [x \varepsilon \lambda(u - \iota x)]$ Df

·01 $\delta u = q \frown x \ni \{ l_{\iota} \bmod [(u - \iota x) - x] = 0 \}$ Dfp

·1 $\delta(u \cup v) = \delta u \cup \delta v$ { Distrib(δ,∪) } ·11 $u \supset v$.⊃. $\delta u \supset \delta v$

·2 $\delta\delta u \supset \delta u$ ·21 $u \supset \delta u$.⊃. $\delta u = \delta^2 u$

·3 $m \varepsilon N_1$.⊃. $\delta^m u \supset \delta u$

Le signe $\delta^m u$ a été défini par §+ P10·9.

·4 Num$u$ ε infn . l′ mod$u$ εQ .⊃. ∃ δu

·41 $v \varepsilon$ Cls'q . Num$u$ ε infn . l′ mod$u$ εQ .⊃.

l′ q⌒$x \ni$ {Num[u⌒(x+Q)] ε infn} = max δu .

l_{ι} » » — » = min δu

·5 Num$u$ εN_0 .⊃. -∃ δu

·6 -∃ δn . δr = δq = q . δ /N_1 = ι0 . δ(/N_1 + /N_1) = ι0 ∪ /N_1

δ(/N_1 − /N_1) = /N_1 ∪ −/N_1 ∪ ι0

·7 $a \varepsilon$q .⊃. $\delta(a+u) = a + \delta u$

·8 ∃δu . $\delta u \supset u$.⊃. Num Cls'q ⌒ $w \ni (u = \delta w)$ ε infn

·9 $\lambda u = u \cup \delta u$ Dfp

{ G. CANTOR a.1871 MA. t.5 p.123 } {Continuation F1895 §5}

G. Cantor a indiqué « l'ensemble dérivé de u » par u' ; la notation Du de F1895 est ici remplacée par δu.

La bibliographie de ces sujets, due à M. Vivanti, est contenue dans F1895 et continuée dans BM. a.1900 p.160.

Plusieurs noms introduits par les A. s'expriment facilement sans des symboles nouveaux, comme suit :

$\delta u \supset u$.=. $u = \lambda u$.=. « l'ensemble u est fermé (abgeschlossen, chiuso) »

$u \supset \delta u$.=. « l'ensemble u est condensé en soi (insichdickt) ».

$u = \delta u$.=. « » est parfait (perfect) ».

-∃u⌒δu .=. « » est isolé (isolirt) ».

✱ 2. $u \varepsilon$ Cls'q .⊃:

·1 $\delta u \supset u$.⊃. Num$u$ ε N_0 ∪ ι NumN_0 ∪ ι Num Θ

{ G. CANTOR MA. a.1884 p.488 }

·2 ∃u . $\delta u = u$.⊃. Num$u$ = NumΘ

{ G. CANTOR MA. a.1884 p.485 }

·3 $u \frown \delta u = \Lambda \;.\supset.\; \mathrm{Num}\, u \;\varepsilon\; N_0 \cup \iota\, \mathrm{Num}\, N_0$
{ G. Cantor MA. a.1882 p.51 ; AM. a.1883 a.373 }

·4 $\mathrm{Num}\, \delta u = \mathrm{Num}\, N_0 \;.\supset.\; \mathrm{Num}\, u = \mathrm{Num}\, N_0$
{ G. Cantor MA. a.1882 p.51 ; AM. a.1883 p.374 }

Continuation : §cont P1 §D P1 §q_n P14

§ 67 Int = (intérieur)

$u, v \,\varepsilon\, \mathrm{Cls}'q \;.\supset.$ ·0 $\mathrm{Int}\, u = \mathrm{I}u = q - \lambda(q - u)$ Df

Note. Avec le symbole I on peut exprimer simplement plusieurs autres classes introduites dans F1889, et ensuite par plusieurs A.

Notamment :

$\mathrm{Int}\, u$ ou $\mathrm{I}u$ = points intérieurs du domaine u
$\mathrm{E}u = q - \lambda u$ = » extérieurs »
$\mathrm{L}u = \lambda(q - u) \frown \lambda u$ = » frontière »

·1 $\mathrm{I}u \supset u$ ·2 $\mathrm{I}\mathrm{I}u = \mathrm{I}u$ ·3 $\mathrm{I}(u \frown v) = \mathrm{I}u \frown \mathrm{I}v$

·31 $u \supset v \;.\supset.\; \mathrm{I}u \supset \mathrm{I}v$ ·32 $\mathrm{I}(u \cup v) \supset \mathrm{I}u \cup \mathrm{I}v$

·33 $\mathrm{I}(\mathrm{I}u \cup \mathrm{I}v) = \mathrm{I}u \cup \mathrm{I}v$

[§λ P1·1-·33 .⊃. ·1-·33]

·4 $\lambda u = q - \mathrm{I}(q - u)$ Dfp ·5 $\mathrm{I}u = u - \delta(q - u)$ Dfp

Continuation : §q_n P15·1 §Γ P3·2

TROISIÈME PARTIE

FONCTIONS ANALYTIQUES

§70 const cres decr

$u \varepsilon \mathrm{Cls'q} \,.\, f \varepsilon \mathrm{qf}u \,.\supset.$

·0 $f \varepsilon (\mathrm{qf}u)\mathrm{const} \,.=:\, x,y \varepsilon u \,.\supset_{x,y}.\, fx = fy$ Df

$f \varepsilon (\mathrm{qf}u)\mathrm{cres} \,.=:\, x,y \varepsilon u \,.\, x < y \,.\supset_{x,y}.\, fx < fy$ Df

» cres_0 .=: » $\leqq$ » Df

» decr .=: » $>$ » Df

» decr_0 .=: » $\geqq$ » Df

Note. Les P·0-·4 donnent une forme symbolique aux expressions « fonction constante », « fonction croissante (crescens) », « fonction croissante lorsqu'elle varie, ou fonction jamais décroissante », « fonction décroissante », et « fonction jamais croissante ».

·1 $(\mathrm{qf}u)\mathrm{cres} \supset (\mathrm{qf}u)\mathrm{cres}_0$ ·11 $\mathrm{idem} \,\varepsilon\, (\mathrm{qf}u)\mathrm{cres}$

·12 $(\mathrm{qf}u)\mathrm{cres} \supset (\mathrm{qf}u)\mathrm{sim}$

$f,g \varepsilon (\mathrm{qf}u)\mathrm{cres} \,.\supset.$ ·2 $f+g \,\varepsilon\, (\mathrm{qf}u)\mathrm{cres}$ ·3 $-f \,\varepsilon\, (\mathrm{qf}u)\mathrm{decr}$

·4 $a \varepsilon \mathrm{Q} \,.\supset.\, af \,\varepsilon\, (\mathrm{qf}u)\mathrm{cres}$

·5 $f,g \varepsilon (\mathrm{Qf}u)\mathrm{cres} \,.\supset.\, f \times g \,\varepsilon\, (\mathrm{Qf}u)\mathrm{cres} \,.\, /f \,\varepsilon\, (\mathrm{Qf}u)\mathrm{decr}$

·6 $f \varepsilon (\mathrm{qf}u)\mathrm{cres} \,.\, g \varepsilon [\mathrm{qf}(f`u)]\mathrm{cres} \,.\supset.\, gf \,\varepsilon\, (\mathrm{qf}u)\mathrm{cres}$

·7 $m \varepsilon \mathrm{Q} \,.\supset.\, (x^m)|x \,\varepsilon\, (\mathrm{QfQ})\mathrm{cres}$

·71 $a \varepsilon 1+\mathrm{Q} \,.\supset.\, a^x|x \,\varepsilon\, (\mathrm{Qfq})\mathrm{cres}$

max ·8 $f \varepsilon (\mathrm{qf}u)\mathrm{cres}_0 \,.\, \exists\, \iota \max u \,.\supset.\, \max f`u = f \max u$

·81 ——————— min$u$ ——min————min$u$

l l$_{\prime}$ ·9 $f \varepsilon (\mathrm{qf}u)\mathrm{cres}_0 \,.\, x \varepsilon u \,.\supset.\, \mathrm{l}'f`u = \mathrm{l}'f[u \frown (x+\mathrm{Q}_0)]$

·91 » » $\mathrm{l}_{\prime}$ » $\mathrm{l}_{\prime}$ » — »

[Hp .⊃. $u = [u \frown (x-\mathrm{Q})] \cup [u \frown (x+\mathrm{Q}_0)]$ (1)

(1) . §' 1·5 .⊃. $f`u = f`[$ » $] \cup f`[$ » $]$ (2)

(2) . §q 82·8 .⊃. $\mathrm{l}'f`u = \max\{\mathrm{l}'f`[$ » $] \cup \mathrm{l}'f`[$ » $]$ (3)

Hp . $y \varepsilon u \frown (x-\mathrm{Q}) \,.\, z \varepsilon u \frown (x+\mathrm{Q}_0) \,.\supset.\, y < z \,.\supset.\, fy \leqq fz \leqq \mathrm{l}'f[u \frown (x+\mathrm{Q}_0)]$ (4)

(4) . §q 18·11 .⊃. $\mathrm{l}'f`[u \frown (x-\mathrm{Q})] \leqq \mathrm{l}'f`[u \frown (x+\mathrm{Q}_0)]$ (5)

(3) . (5) .⊃. Ths]

Med ·92 $f \varepsilon (\mathrm{qfq})\mathrm{cres} \,.\, u \varepsilon \mathrm{Cls'q} \,.\supset.\, \mathrm{Med}f`u = f`\mathrm{Med}u$

Continuation : §lim 1·5, 12·4, 18·6 §D 4·7 §S 1, 4, 11·0.

§71 Lm

q Λ ✱ 1. $x \varepsilon \mathrm{qfN}_0 \,.\!\supset.$

·0 $\mathrm{Lm}x = a \ni [\, m \varepsilon \mathrm{N}_0 \,.\!\supset_m.\; a \varepsilon \Lambda\, x`(m+\mathrm{N}_0) \,]$ Df Lm

Note. « Soit x une suite de quantités. Pour définir $\mathrm{Lm}x$, qu'on lira « les valeurs limites de x » ou « la classe limite de x », soit m un entier; considérons l'ensemble $x`(m+\mathrm{N}_0)$ des valeurs de la fonction xn, où n prend toutes les valeurs entières à partir de m, et formons la limite Λ de cette classe. Si une quantité a appartient toujours à cette classe, quel que soit le nombre entier m, elle sera une valeur limite de la suite x. »

Cette classe limite d'une fonction se rencontre dans Cauchy a.1821 p.30: « ..... si l'on suppose que la variable x converge vers zéro, on aura

$$\lim\left(\left(\sin\frac{1}{x}\right)\right) = \mathrm{M}\,((-1, +1)),$$

attendu que l'expression $\lim\left(\left(\sin\frac{1}{x}\right)\right)$ admettra une infinité de valeurs comprises entre les valeurs extrêmes -1 et $+1$. »

Voir §lim 16·11, RdM. a.1892 p.77, et ma publication: *Sur la définition de la limite d'une fonction*, AJ. a.1894.

·01 $\mathrm{Lm}x \supset \Lambda(x`\mathrm{N}_0)$ ·02 $m \varepsilon \mathrm{N}_0 \,.\!\supset.\; \mathrm{Lm}x \supset \Lambda\, x`(m+\mathrm{N}_0)$

·1 $a \varepsilon \mathrm{q} \,.\!\supset\therefore$

$a \varepsilon \mathrm{Lm}x \;.=:\; m \varepsilon \mathrm{N}_0 \,.\, h \varepsilon \mathrm{Q} \,.\!\supset_{m,h}.\; \exists\, (m+\mathrm{N}_0) \cap n \ni [\mathrm{mod}(x_n - a) < h]$

[Hp . P·0 $.\!\supset\!.\because$ $a \varepsilon \mathrm{Lm}x \;.=:\; m \varepsilon \mathrm{N}_0 \,.\!\supset^m .\; a \varepsilon \mathrm{q} \cap \Lambda\, x`(m+\mathrm{N}_0)$

§λ P3·2 $.\!\supset\!.\because$ » » » $a \varepsilon \lambda\, x`(m+\mathrm{N}_0)$

§λ P1·01 $.\!\supset\!::$ » $.=\because. m \varepsilon \mathrm{N}_0 .\!\supset_m : h \varepsilon \mathrm{Q} .\!\supset_h .\exists\, x`(m+\mathrm{N}_0) \cap y \ni [\mathrm{md}(y-a) < l\,]$

Import $.\!\supset\!.\because$ » $.=:\; m \varepsilon \mathrm{N}_0 \,.\, h \varepsilon \mathrm{Q} \,.\!\supset_{m,h}.$ » » » »

§` P1·3 $.\!\supset\!.\because$ » » » » » $\exists\, (m+\mathrm{N}_0) \cap n \ni [\mathrm{md}(x_n - a) < h]$

·2 $+\infty\; \varepsilon\, \mathrm{Lm}x \;.=.\; \mathrm{l}'\, x`\mathrm{N}_0 = \infty$

·3 $-\infty\; \varepsilon\, \mathrm{Lm}x \;.=.\; \mathrm{l}_{,}\, x`\mathrm{N}_0 = -\infty$

·4 $\mathrm{l}'\, x`\mathrm{N}_0 ,\, \mathrm{l}_{,}\, x`\mathrm{N}_0\, \varepsilon \mathrm{q} \,.\!\supset.\; \mathrm{l}_{,}\{[\mathrm{l}'\, x`(m+\mathrm{N}_0)] \,|m`\, \mathrm{N}_0\}\; \varepsilon\; \mathrm{q} \cap \mathrm{Lm}x$

[Hp . $m \varepsilon \mathrm{N}_0$. §` P1·2 $.\!\supset.\; x`(m+\mathrm{N}_0) \supset x`\mathrm{N}_0$ (1)

Hp(1) . §Q P18·5 $.\!\supset.\; \mathrm{l}'x`(m+\mathrm{N}_0)\, \varepsilon \mathrm{q}$ (2)

Hp . $m, n \varepsilon \mathrm{N}_0 \,.\, m < n \,.\!\supset.\; \mathrm{l}'x`(m+\mathrm{N}_0) \geqq \mathrm{l}'x`(n+\mathrm{N}_0)$ (3)

Hp . $y = [\mathrm{l}'x`(m+\mathrm{N}_0)]|m$. (2) . (3) $.\!\supset.\; y \varepsilon (\mathrm{qfN}_0)\mathrm{decr}_0$ (4)

Hp(4) . $m, n \varepsilon \mathrm{N}_0$. §λ P2·7 $.\!\supset.\; y(m+n)\, \varepsilon\, \lambda\, x`(m+n+\mathrm{N}_0)$ (5)

» » . §λ P1·31 $.\!\supset.\; \lambda x`(m+n+\mathrm{N}_0) \supset \lambda\, x`(m+\mathrm{N}_0)$ (6)

» » . (5).(6) $.\!\supset.\; y(m+n)\, \varepsilon\, \lambda\, x`(m+\mathrm{N}_0)$ (7)

» . $m \varepsilon \mathrm{N}_0$. (7) $.\!\supset.\; y`(m+\mathrm{N}_0) \supset \lambda x`(m+\mathrm{N}_0)$ (8)

» . » $.\!\supset.\; ym \geqq \mathrm{l}_{,}x`\mathrm{N}_0$ (9)

Hp(4) . $a = \mathrm{l}_{,} y`\mathrm{N}_0$. (9) . §Q P18·12 $.\supset.$ $a \varepsilon \mathrm{q}$ (10)
Hp(10) . $m \varepsilon \mathrm{N}_0$. §decr P·9 $.\supset.$ $a = \mathrm{l}_{,} y`(m+\mathrm{N}_0)$ (11)
» » . (11) . §λ P2·7 $.\supset.$ $a \varepsilon \lambda\, y`(m+\mathrm{N}_0)$ (12)
» » . (12) . (8) $.\supset.$ $a \varepsilon \lambda\lambda\, x`(m+\mathrm{N}_0)$ (13)
» » . (13) . §λ P1·2 $.\supset.$ $a \varepsilon \lambda\, x`(m+\mathrm{N}_0)$ (14)
» . (14) Export $.\supset:$ $m \varepsilon \mathrm{N}_0 \,.\supset_m.\, a \varepsilon \lambda\, x`(m+\mathrm{N}_0)$ (15)
» . (15) . P·9 $.\supset.$ $a \varepsilon \mathrm{q} \frown \mathrm{Lm}x$ (16)
Hp . $y = \mathrm{l}'x`(m+\mathrm{N}_0) \,]\, m$ . $a = \mathrm{l}_{,} y`\mathrm{N}_0$ $.\supset.$ $a \varepsilon \mathrm{q} \frown \mathrm{Lm}x$]

·41 Hp P·4 $.\supset.$ $\mathrm{l}_{,}\{[\mathrm{l}'x`(m+\mathrm{N}_0)] \,|\, m\,`\mathrm{N}_0\} = \max \mathrm{Lm}\,x$
·42 » $\mathrm{l}'\{|\mathrm{l}_{,}$ » » » min »
·5 $\exists\, \mathrm{Lm}x$ [P·2·3·4 $.\supset.$ P]
·6 $\lambda(\mathrm{q} \frown \mathrm{Lm}x) = \mathrm{q} \frown \mathrm{Lm}x$

✻ 2. $x,y \varepsilon \mathrm{qfN}_0$. $a \varepsilon \mathrm{q}$. $m \varepsilon \mathrm{N}_1$ $.\supset:$
·0 $\mathrm{Lm}\, \imath(\iota a \mathrm{F} \mathrm{N}_0) = \iota a$
·1 $\mathrm{Lm}(a+x) = a + \mathrm{Lm}x$
·2 $-(-\infty \,\varepsilon\, \mathrm{Lm}x \,.\, +\infty \,\varepsilon\, \mathrm{Lm}y) \,.\, -(+\infty \,\varepsilon\, \mathrm{Lm}x \,.\, -\infty \,\varepsilon\, \mathrm{Lm}y)$ $.\supset.$
$\mathrm{Lm}(x+y) \supset \mathrm{Lm}x + \mathrm{Lm}y$
·3 $\mathrm{Lm}x = \mathrm{Lm}[x(m+r) \,|\, r]$
·4 $\mathrm{Lm}(-x) = -\mathrm{Lm}x$ ·5 $a \varepsilon \mathrm{Lm}x \,.=.\, 0 \varepsilon \mathrm{Lm}(x-a)$
·6 $a -= 0$ $.\supset.$ $\mathrm{Lm}(a \times x) = a \times \mathrm{Lm}x$
·7 $-(0 \varepsilon \mathrm{Lm}x \,.\, \infty \,\varepsilon\, \mathrm{Lm}\,\mathrm{mod}y) \,.\, -(0 \varepsilon \mathrm{Lm}y \,.\, \infty \,\varepsilon\, \mathrm{Lm}\,\mathrm{mod}x)$ $.\supset.$
$\mathrm{Lm}(x \times y) = \mathrm{Lm}x \times \mathrm{Lm}y$
·8 $x \varepsilon \mathrm{QfN}_0$. $0, \infty -\varepsilon \mathrm{Lm}x$ $.\supset.$ $\mathrm{Lm}/x = /\mathrm{Lm}x$
·9 $\mathrm{Lm}\, x^m = (\mathrm{Lm}x)^m$
·91 $\mathrm{Lm}\, (-1)^n | n = \iota 1 \cup \iota(-1)$

✻ 3.
·1 $m \varepsilon \mathrm{N}_1$ $.\supset.$ $\mathrm{Lm}\beta(n/m) | n = [0 \cdots (m-1)]/m$
·2 $a \varepsilon \mathrm{R}$ $.\supset.$ $\mathrm{Lm}\, \beta(an) | n = [0 \cdots (\mathrm{dt}a - 1)]/\mathrm{dt}a$
·3 $a \varepsilon \mathrm{Q} - \mathrm{R}$ $.\supset.$ $\mathrm{Lm}\, \beta(an) | n = \Theta$ ·31 $\mathrm{Lm}\, \beta \surd = \Theta$
·4 $\mathrm{Lm}\, [n - (\mathrm{E}\surd n)^2] | n = \mathrm{N}_0 \cup \iota\infty$. $\mathrm{Lm}\, [n - (\mathrm{E}\surd n)^2]/\surd n \,|\, n = 2\Theta$

✻ 4. $u \varepsilon \mathrm{Cls'q}$. $x \varepsilon \delta u$. $f \varepsilon \mathrm{qf}u$ $.\supset.$ ·0 $\mathrm{Lm}(f,u,x) =$
$a \ni \{h \varepsilon \mathrm{Q} \,.\supset_h.\, a \varepsilon \Lambda f`[(u - \iota x) \frown y \ni \mathrm{mod}(y-x) < h]\}$ Df
·1 $a \varepsilon \mathrm{q}$ $.\supset\therefore$ $a \varepsilon \mathrm{Lm}(f,u,x) \,.=:$
$h,k \varepsilon \mathrm{Q} \,.\supset_{h,k}.\, \exists\, u - \iota x \frown y \ni [\mathrm{mod}(y-x) < h \,.\, \mathrm{mod}(fy - a) < k]$

·2 $\infty\,\varepsilon\,\mathrm{Lm}(f,u,x) .=:$
$h,k\varepsilon\mathrm{Q} .\supset_{h,k} . \exists\, u-\iota x \cap y\ni[\,\mathrm{mod}(y-x)<h \,.\, \mathrm{mod}fy>k\,]$

·3 $\infty\,\varepsilon\,\mathrm{Lm}(f,u,x) .=:$
$h\varepsilon\mathrm{Q} .\supset_h . \mathrm{l}'\,\mathrm{mod}\, f`(u-\iota x)\cap y\ni[\mathrm{mod}(y-x)<h] = \infty$

Soit u une classe de quantités, x un point de la classe dérivée de u. Soit f une quantité fonction des u. Par $\mathrm{Lm}(f,u,x)$, qu'on peut lire « les valeurs limites de la fonction f, lorsque la variable, en variant dans la classe u, tend vers x », nous indiquons toute quantité a, finie ou infinie, telle que, étant donnée une quantité positive (aussi petite qu'on veut) h, a est toujours une limite généralisée (Λ) de l'ensemble des valeurs de fy, lorsque la variable y prend dans la classe u toutes les valeurs différentes de x, et dont la différence à x est en valeur absolue plus petite que h.

Les P·1 et ·2 sont des transformations de la définition précédente, où l'on remplace le signe Λ par sa valeur.

La notation actuelle $\lim(f,u,x)$ remplace la notation adoptée dans F1895 $\lim_{z,u,x} fz$, qui contient la lettre apparente z. Dans la notation commune $\lim_{z=x} fz$, il faut indiquer par le langage ordinaire l'ensemble dans lequel varie la variable z.

·4 $\exists\,\mathrm{Lm}(f,u,x)$ ·5 $\mathrm{Lm}(f,u,x)\supset\Lambda f`u$

·6 $v\varepsilon\,\mathrm{Cls}`u \,.\, x\varepsilon\,\delta v .\supset. \mathrm{Lm}(f,v,x)\supset\mathrm{Lm}(f,u,x)$

·7 $v,w\varepsilon\,\mathrm{Cls}`u \,.\, x\varepsilon\,\delta v\cap\delta w .\supset.$
$\mathrm{Lm}(f, v\cup w, x) = \mathrm{Lm}(f,v,x)\cup\mathrm{Lm}(f,w,x)$

✻ 5. $u\varepsilon\,\mathrm{Cls}`\mathrm{q} \,.\, \mathrm{l}'\mathrm{mod}u\,\varepsilon\mathrm{Q} \,.\, f\varepsilon\,\mathrm{qf}u .\supset:$

·1 $a\varepsilon\,\delta f`u .\supset. \exists\,\delta u\cap x\ni[\,a\varepsilon\,\mathrm{Lm}(f,u,x)\,]$

·2 $\infty = \mathrm{l}'\mathrm{mod}f`u \supset. \exists\,\delta u\cap x\ni[\,\infty\,\varepsilon\,\mathrm{Lm}(f,u,x)\,]$

✻ 6. $u\varepsilon\,\mathrm{Cls}`\mathrm{q} \,.\, \mathrm{l}'\mathrm{mod}u=\infty \,.\, f\varepsilon\,\mathrm{qf}u .\supset.$

·1 $\mathrm{Lm}(f,u,\infty) = a\ni\{h\varepsilon\mathrm{Q} .\supset_h . a\varepsilon\,\Lambda f`[\,u\cap y\ni(\mathrm{mod}y>h)]\}$ Df

·2 $f\varepsilon\,\mathrm{qfN}_0 .\supset. \mathrm{Lm}f = \mathrm{Lm}(f,\mathrm{N}_0,\infty)$ Dfp

Nous définissons ici $\mathrm{Lm}(f,u,\infty)$ « les valeurs limites de la fonction f, lorsque la variable, en variant dans la classe u, tend à l'∞ ». On suppose que la variable puisse tendre vers l'∞ ; c'est-à-dire que $\mathrm{l}'\,\mathrm{mod}\,u=\infty$.

Si la classe u se réduit à la classe des nombres naturels N_0, la fonction f s'appelle une suite, et la $\mathrm{Lm}\,(f,\mathrm{N}_0,\infty)$ que nous venons de définir est ce qu'on a indiqué dans P1 par $\mathrm{Lm}\,f$.

Continuation : §lim 1·0 15·1 §qn 21-25 §vct 20.

§72 lim

$+ \quad - \quad \text{mod} \quad \infty \quad \text{q} \quad \text{Lm} \quad \text{lim}$

* 1. $x \varepsilon \text{qfN}_0 . \supset .$ ·0 $\text{lim} x = \iota \, \text{Lm} x$ Df lim

·1 $a \varepsilon \text{q} . \supset \therefore$

$a = \text{lim} x . =: h \varepsilon \text{Q} . \supset_h . \exists \, \text{N}_0 \frown m \ni [n \varepsilon m + \text{N}_0 . \supset_n . \text{mod}(x_n - a) < h]$

$+\infty = \text{lim} x . =:$ ——————————————— $. x_n > h \,]$

$-\infty$ ——————————————————————— $. x_n < -h \,]$ Dfp

Note. Soit x une suite de nombres. Par lim$x$ « la limite des x » nous indiquons le nombre fini ou infini qui constitue la classe Lmx. L'expression lim$x$ aura donc une signification lorsque les conditions de §ι P·0 seront satisfaites, c'est-à-dire lorsque la classe Lmx contiendra un seul nombre, fini ou infini. La P·1 donne la même Df, où on a remplacé le signe Lm par sa valeur.

La notation commune est $\lim_{n=\infty} x_n$; ici la lettre n est apparente.

Pour les fonctions croissantes les idées lim et l' sont réductibles entre elles, par la P·5. L'expression de Wallis, a.1655 t.1 p.383, où il remarque qu'une quantité variable « continue propius accedere » à une fixe « ita ut differentia tandem evadat quavis assignata minor ; adeoque in infinitum continuata evanescet » convient à ce cas particulier.

Dans Cauchy les idées Lm et lim sont encore confondues. L'idée Lm a été abandonnée jusqu'à nos jours. La Df de lim encore insuffisante dans la 1-ère éd. de Duhamel, *Cours d'Analyse* a.1847 p.6, est complète dans la 2-ième éd. *Éléments de Calcul infinitésimal* a.1860 p.9 : " lorsqu'une grandeur prend successivement des valeurs qui se rapprochent de plus en plus de celle d'une grandeur constante, de telle sorte que la différence avec cette dernière puisse devenir et *rester* moindre que toute grandeur désignée, soit que la variable soit toujours au-dessus, ou toujours au-dessous, ou tantôt au-dessous et tantôt au-dessus de la constante, on dit que la première *approche indéfiniment* de la seconde, et que celle-ci en est la *limite* ".

Les mots suivants :

" Ainsi nous appelons *limite d'une variable une quantité constante dont la variable approche indéfiniment sans jamais l'atteindre* "

et qui en restreignent la valeur, ont disparu dans la 4-ième éd. a.1886 p.12.

·2 $\text{lim} x \, \varepsilon \, \text{q} \cup \iota(+\infty) \cup \iota(-\infty) . \supset . \text{Lm} x = \iota \, \text{lim} x$

·3 $\lim x \varepsilon q .=: h \varepsilon Q . \supset_h . \exists N_0 \frown m \ni [n \varepsilon N_0 . \supset_n . \mathrm{mod}(x_m - x_{m+n}) < h]$

{ BOLZANO a.1817 p.35: « Wenn eine Reihe von Grössen

$F^1x, \quad F^2x, \ldots \quad F^nx, \ldots \quad F^{n+r}x \ldots$

von der Beschaffenheit ist, dass der Unterschied zwischen ihren $n$ten Gliede F^nx und jedem späteren $F^{n+r}x$, sey dieses von jenem auch noch so weit entfernt, kleiner als jede gegebene Grösse verbleibt, wenn man n gross genug angenommen hat: so giebt es jedesmahl eine gewisse *beständige* Grösse und zwar nur *eine*, der sich die Glieder dieser Reihe immer mehr nähern ... » }

·4 $\lim x \varepsilon q .=: h \varepsilon Q . \supset_h . \exists N_0 \frown m \ni [p,q \varepsilon m + N_0 . \supset_{p,q} . \mathrm{mod}(x_p - x_q) < h]$

Les P·3·4 sont deux formes du « principe général de convergence », ainsi nommé par Du Bois-Reymond. Il a eu grande importance dans plusieurs traités d'Analyse ; mais on peut le remplacer partout par §q 18·1. Voir mes *Lezioni* a.1893.

L'énoncé symbolique présente les lettres h, m, n dans l'ordre écrit. Si on les permute, on a des propositions fausses. L'énoncé de Cauchy n'est pas clair ; on peut lire les lettres dans l'ordre n, m, h ; et a donné lieu à des discussions entre Catalan, Mansion,... Voir aussi Encyclopädie t.1 p.79.

·5 $f \varepsilon (\mathrm{qf}N_0)\mathrm{cres}_0 . \supset . \lim f = \mathrm{l}'f`N_0 . \lim f \varepsilon q \cup \iota(+\infty)$

·6 ———— decr_0 ———————— $\mathrm{l}_, f`N_0$. ———— $\iota(-\infty)$

·7 $a \varepsilon q . \supset . \lim \imath(\iota a \,\mathrm{F}\, N_0) = a$

✻ 2. $u \varepsilon \mathrm{Cls}'q . x \varepsilon \delta u . f \varepsilon \mathrm{qf}u . \supset ::$

·0 $\lim(f,u,x) = \imath\, \mathrm{Lm}(f,u,x)$ Df

·1 $a \varepsilon q . \supset :. a = \lim(f,u,x) .=:$
$k \varepsilon Q . \supset_k . \exists Q \frown h \ni [y \varepsilon u - \iota x . \mathrm{mod}(y - x) < h . \supset_y . \mathrm{mod}(fy - a) < k]$

·2 $\infty = \lim(f,u,x) .=: k \varepsilon Q . \supset_k .$
$\exists Q \frown h \ni [y \varepsilon u - \iota x . \mathrm{mod}(y - x) < h . \supset_y . \mathrm{mod} fy > k]$

·3 $\lim(f,u,x) \varepsilon q .=: k \varepsilon Q . \supset_k . \exists Q \frown h \ni [y,z \varepsilon u - \iota x .$
$\mathrm{mod}(y - x) < h . \mathrm{mod}(z - x) < h . \supset_{y,z} . \mathrm{mod}(fy - fz) < k]$

·4 $\exists \iota \lim(f,u,x) . v \varepsilon \mathrm{Cls}'u . x \varepsilon \delta v . \supset . \lim(f,v,x) = \lim(f,u,x)$

La P·0 donne la Df de $\lim(f,u,x)$ qu'on peut lire " la limite de la fonction f, lorsque la variable, en variant dans la classe u, tend vers x, qui est une valeur appartenant à la classe dérivée de u ".

✻ 3. $u \varepsilon \mathrm{Cls}'q . \mathrm{l}' \mathrm{mod} u = \infty . f \varepsilon \mathrm{qf} u . \supset .$
$\lim(f,u,\infty) = \imath\, \mathrm{Lm}(f,u,\infty)$ Df

$+$ ✻ 4·1 $a\varepsilon q\ .\supset.\ \lim (a+n)|n = \infty$

·2 $x,y \varepsilon\, qfN_0\ .\ \lim x, \lim y\ \varepsilon q\ .\supset.\ \lim(x+y) = \lim x + \lim y$

» $.\ \lim x = \infty\ .\ -\infty\, -\varepsilon\, \mathrm{Lm} y\ .\supset.\ \lim(x+y) = \infty$

{ Distrib(lim, +) }

$-$ ✻ 5·1 $a\varepsilon q\ .\supset.\ \lim (a-n)|n = -\infty$

·2 $x\varepsilon\, qfN_0\ .\ \lim x\ \varepsilon q\ .\supset.\ \lim -x = -\lim x$ { Comm(lim,—) }

» » $=\infty$ » $-\infty$

$\times$ ✻ 6·1 $a\varepsilon Q\ .\supset.\ \lim (an)|n = \infty$

·2 $x,y\varepsilon\, qfN_0\ .\ \lim x. \lim y\ \varepsilon q\ .\supset.\ \lim(x\times y) = \lim x \times \lim y$

» $\lim x = \infty\ .\ 0\, -\varepsilon\, \mathrm{Lm} y\ .\supset.\ \lim xy = \infty$

{ Distrib(lim, ×) }

/ ✻ 7·1 $\lim (/n)|n = 0$

·2 $x\varepsilon\, (q-\iota 0)fN_0\ .\ \lim x\ \varepsilon\ q-\iota 0\ .\supset.\ \lim /x = /\lim x$

» » $=0$ » » ∞

» » ∞ » » 0 { Comm(lim, /) }

·3 $a,b,c,d\varepsilon q\ .\ c\, -\varepsilon\, -dN_0\ .\supset.\ \lim (an+b)/(cn+d)\ |n = a/c$

{ Jac. Bernoulli a.1689 *Opera*, p.382 }

·4 $x\varepsilon\, qfN_0\ .\ \lim(x_{n+1}-x_n)\ |n\ \varepsilon\ q \cup \iota\infty \cup \iota(-\infty)\ .\supset.$

$\lim(x_n/n)|n = \lim(x_{n+1}-x_n)\ |n$ { Cauchy a.1821 p.63 }

↾ ✻ 8·1 $a\varepsilon Q\ .\supset.\ \lim (n^a)|n = \infty\ .\ \lim (n^{-a})|n = 0$

·2 $a\varepsilon\ 1+Q\ .\supset.\ \lim (a^n)|n = \infty$

[$n\varepsilon N_1\ .\supset.\ a^n > 1+n(a-1)\ :\ \mathrm{Lm}\, [1+n(a-1)]|n = \infty\ :\supset P$]

·21 $a\varepsilon\theta\ .\supset.\ \lim (a^n)|n = 0$

·3 $x\varepsilon\, qfN_0\ .\ \lim x\ \varepsilon q\ .\ m\varepsilon N_1\ .\supset.\ \lim(x^m) = (\lim x)^m$

·31 $x\varepsilon\, QfN_0\ .\ \lim x\ \varepsilon Q\ .\ m\varepsilon q\ .\supset.\ \lim(x^m) = (\lim x)^m$

·4 Hp·31 $.\ y\varepsilon\, qfN_0\ .\ \lim y\ \varepsilon q\ .\supset.\ \lim x↾y = (\lim x)↾(\lim y)$

{ Distrib(lim, ↾) }

·41 $a\varepsilon Q\ .\supset.\ \lim \sqrt[n]{a}|n = 1$

·5 $a\varepsilon\theta\ .\supset.\ \lim(a↾)^n 1\ |n\ \ \varepsilon\ Q$

————————— $= \imath\, Q \cap x\ni(a^x = x)$

{ Eisenstein JfM. a.1844 t.28 p.49 }

·6 $x\varepsilon\, QfN_0\ .\ \lim (x_{n+1}/x_n)|n\ \varepsilon\ Q_0 \cup \iota\infty\ .\supset.$

$\lim (\sqrt[n]{x_n})|n = \lim (x_{n+1}/x_n)|n$ { Cauchy a.1821 p.63 }

·7 $a,b\varepsilon Q\ .\supset.\ \lim [(\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b})/2]^n|n = \sqrt{(ab)}$

·8 $a\varepsilon\ 1+Q\ .\supset.\ \lim (a^n/n)\ |n = \infty$

{ Jac. Bernoulli a.1689 p.383 }

·81 ——— $.\ m\varepsilon N_1\ .\supset.\ \lim (a^n/n^m)|n = \infty$

·9 $a \varepsilon Q . n \varepsilon N_1 . \supset . \lim \{[\sqrt[n]{(a+x)} | x]^r 0\} | r = \iota Q \frown x \ni (x^n - x - a) = 0$
{ Joh. Bernoulli t.4 p.13:
« universaliter $\sqrt[n]{(a+\sqrt[n]{(a+\sqrt[n]{(a+\sqrt[n]{(a \; \&c.)})})})}$ pro aequatione habebitur $x^n - x - a = 0$ » }

✱ 9·1 $u \varepsilon \mathrm{qf} N_1 . \lim u \, \varepsilon \mathrm{q} . \supset . \lim [\Sigma(u, 1 \cdots n) / n] | n = \lim u$ [=P7·4]
·2 $n \varepsilon N_1 . u \varepsilon \mathrm{qf}(1 \cdots n, N_0) . \supset .$
$\mathrm{Lm} \, \Sigma[u(r,s) | r, 1 \cdots n] | s \supset \Sigma \{[\mathrm{Lm} \, u(r,s) | s] | r, 1 \cdots n\}$
·3 $\mathrm{Hp} \cdot 2 : r \varepsilon 1 \cdots n . \supset_r . \lim u(r,s) | s \, \varepsilon \mathrm{q} : \supset .$
$\lim \Sigma[u(r,s) | r, 1 \cdots n] | s = \Sigma \{[\lim u(r,s) | s] | r, 1 \cdots n\}$
{ Comm(Σ, lim) }

Σ ✱ 10. $u, v \varepsilon \mathrm{qf} N_0 . \supset :$
·0 $\Sigma(u, N_0) = u_0 + u_1 + \ldots = \lim [\Sigma(u, 0 \cdots n)] | n$ Df

P·0 Soit u une suite de q ; c'est-à-dire soient $u_0 \; u_1 \; u_2 \ldots$ des quantités. $\Sigma(u, N_0)$, qu'on écrit aussi $u_0 + u_1 + \ldots$, lorsque la loi de formation est suffisamment claire, et qu'on peut lire « la somme de la série u », est la limite de $\Sigma(u, 0 \cdots n)$ pour n infini.

$\Sigma(u, N_0) \varepsilon \mathrm{q}$.=. « la série u est convergente (*advergens* de Leibniz) »
$\Sigma(\mathrm{mod} u, N_0) \varepsilon Q$.=. « la série est absolument convergente ».

Selon plusieurs A. une série est dite « divergente », si elle n'est pas convergente ; selon d'autres, si $\Sigma(u, N_0) = \infty$, ou $\Sigma(u, N_0) = \pm \infty$, ou si $\infty \, \varepsilon \, \mathrm{Lm} \Sigma(u, 1 \cdots n) | n$; alors une série ni convergente ni divergente est dite « indéterminée ».

·1 $\Sigma(u, N_0) \varepsilon \mathrm{q} . \supset . \lim u = 0$ { Cauchy a.1821 p.116 }
[$\mathrm{Hp} . n \varepsilon N_1 . \supset . u_n = \Sigma(u, 0 \cdots n) - \Sigma(u, 0 \cdots (n-1))$ (1)
$\mathrm{Hp} . (1) . \supset . \lim u = \Sigma(u, N_0) - \Sigma(u, N_0) = 0$]

·2 $m \varepsilon N_1 . \supset . \Sigma(u, N_0) = \Sigma[u, 0 \cdots (m-1)] + \Sigma(u_{m+r} | r, N_0)$

·3 $\Sigma(u, N_0), \Sigma(v, N_0) \varepsilon \mathrm{q} . \supset . \Sigma(u+v, N_0) = \Sigma(u, N_0) + \Sigma(v, N_0)$
{ Cauchy a.1821 p.132 }

[P10·0 . $\supset$. $\Sigma(u+v, N_0) = \lim \Sigma(u+v, 0 \cdots n) | n$
§Σ P1·41 $= \lim [\Sigma(u, 0 \cdots n) + \Sigma(v, 0 \cdots n)] | n$
§Σ P1·4 $= \lim [\Sigma(u, 0 \cdots n) | n + \Sigma(v, 0 \cdots n) | n]$
P4·2 $= \lim \Sigma(u, 0 \cdots n) | n + \lim \Sigma(v, 0 \cdots n) | n$
P10·0 $= \Sigma(u, N_0) + \Sigma(v, N_0)$]

·4 $m \varepsilon N_1 . u \varepsilon \mathrm{q\,f}(1 \cdots m \,;\, N_0) . \supset .$
$\Sigma \{\Sigma[u(r,s) | r, 1 \cdots m] | s, N_0\} = \Sigma \{\Sigma[u(r,s) | s, N_0] | r, 1 \cdots m\}$
·5 $u \varepsilon \mathrm{Qf} N_0 . \supset . \Sigma(u, N_0) \, \varepsilon \, Q \cup \iota \infty$
[$\mathrm{Hp} . \supset . \Sigma(u, 0 \cdots n) | n \, \varepsilon \, (\mathrm{Qf} N_0) \mathrm{cres} . \mathrm{P1} \cdot 5 . \supset . \mathrm{Ths}$]

·6 $u,r \varepsilon \mathrm{Q\,f\,N_0} : n\varepsilon \mathrm{N_0} . \supset_n . u_n < r_n : \Sigma(r,\mathrm{N_0})\, \varepsilon \mathrm{Q} . \supset . \Sigma(u,\mathrm{N_0})\, \varepsilon \mathrm{Q}$

·7 $u\varepsilon\, \mathrm{Qf(N_0:N_0)} . \supset .$
$\Sigma\{\Sigma[u(m,n)|n, \mathrm{N_0}]|m, \mathrm{N_0}\} = \Sigma\{\Sigma[u(m,n)|m, \mathrm{N_0}]|n, \mathrm{N_0}\}$

※ 11.

·1 $k\varepsilon\, \mathrm{Cls'N_0} . \mathrm{Num}\, k\, \varepsilon\, \mathrm{infn} . \supset .$
$\Sigma(f, k) = \Sigma[f(\mathrm{min}_r k)|r, \mathrm{N_0}]$ Df

·2 $k\varepsilon\, \mathrm{Cls} . \exists\, (k\mathrm{f}\mathrm{N_0})\mathrm{rep} . f\varepsilon\, \mathrm{q}\mathrm{f}k . \supset .$
$\Sigma(f,k) = \iota\, x \ni [u\varepsilon\, (k\mathrm{f}\mathrm{N_0})\mathrm{rep} . \supset_u . x = \Sigma(fu, \mathrm{N_0})]$ Df

·21 $k\varepsilon\, \mathrm{Cls} . \exists\, (k\mathrm{f}\mathrm{N_0})\mathrm{rep} . f\varepsilon\, \mathrm{Qf}k . \supset . \Sigma(f,k)\, \varepsilon\, \mathrm{Q} \cup \iota\infty$

·3 $k\varepsilon\, \mathrm{Cls'q} . \supset . \Sigma k = \Sigma(\mathrm{idem}, k)$ Df

·31 $k\varepsilon\, \mathrm{Cls'Q} . \exists k . \supset .$
$\Sigma k = \mathrm{l'}\, x \ni \exists\, (m;u) \ni [m\varepsilon \mathrm{N_1} . u\varepsilon\, (k\mathrm{f}\, 1\cdots m)\mathrm{sim} . x = \Sigma(u, 1\cdots m)]$ Dfp

·32 $k\varepsilon\, \mathrm{Cls'Q} . \supset . \Sigma k\, \varepsilon\, \mathrm{Q}_0 \cup \iota\infty$

·4 $u\varepsilon\, (\mathrm{Qf\,N_0})\mathrm{sim} . \supset . \Sigma(u,\mathrm{N_0}) = \Sigma(u'\mathrm{N_0})$

·5 $k\varepsilon\, \mathrm{Cls'Q} . \mathrm{Num}k\, \varepsilon\, \mathrm{infn} . \Sigma k\, \varepsilon \mathrm{Q} . \supset . \mathrm{Num}k = \mathrm{Num\,N_0}$

·6 $h,k\varepsilon\, \mathrm{Cls'Q} . -\exists(h \cap k) . \supset . \Sigma(h \cup k) = \Sigma h + \Sigma k$

·1. Df de $\Sigma(f,k)$, si $k\varepsilon$ Cls'q. Ex. pour $k = \mathrm{N_1}$, Np, $2\mathrm{N_0}+1$: P17 31·5 §π 3·7.
·2. k est ici une Cls dénombrable. Ex. P19·1 26·2 §q_n 25·1.
·3. Df de la somme des nombres d'une classe. Ex.: 14·1·2 16·7.
Dans le cas de quantités positives on peut prendre par Df la ·31.
Les P·4·5 relient les idées « somme d'une série » et « somme d'une classe ».
P·5 : « Soit k une classe de quantités positives, en nombre infini, et dont la somme soit finie; alors la classe k est dénombrable.
Les Df 10·0 11·1·2 se superposent dans quelques cas.

— Σ ※ 12.

·1 $u\varepsilon\, \mathrm{qf\,N_0} . \lim u = 0 . \supset . u_0 = (u_0 - u_1) + (u_1 - u_2) + \ldots$
{ MacLaurin a.1742 p.293 }

[Hp $. \supset . u_0 = \lim(u_0 - u_n)|n = \lim \Sigma[(u_r - u_{r+1})|r, 0\cdots(n-1)]|n$]

·2 ——— $. \lim u = \infty . \supset . (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \ldots = \infty$

·3 $u\varepsilon\, \mathrm{qf\,N_0} . \Sigma(u,\mathrm{N_0})\, \varepsilon \mathrm{q} . \supset . \Sigma(-u, \mathrm{N_0}) = -\Sigma(u,\mathrm{N_0})$

·4 $u\varepsilon\, (\mathrm{Qf\,N_0})\mathrm{decr} . \lim u = 0 . \supset . u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \ldots\, \varepsilon\, \theta u_0$

·4 ——————————— $. \supset . \Sigma[(-1)^n u_n |n, \mathrm{N_0}]\, \varepsilon\, \theta u_0$

{ Leibniz a.1713 MathS. t.3 p.987 :
« quandocunque series constat ex membris alternatim positivis et privativis et membra ipsa decrescunt in infinitum, series est advergens » }

$\times\ \Sigma$ ❋ 13.

·1 $u\varepsilon\, \text{qf}\, N_0 \,.\, a\varepsilon \text{q} \,.\, \Sigma(u,N_0)\, \varepsilon \text{q} \,.\supset.\, \Sigma(au, N_0) = a\Sigma(u,N_0)$
[Hp $.\supset.\ \Sigma(au,N_0) = \lim \Sigma(au, 0\cdots n)\,|n = \lim a\Sigma(u, 0\cdots n)\,|n =$ $a \lim \Sigma(u, 0\cdots n)\,|n = a\Sigma(u,N_0)$]

·2 $u\varepsilon\, \text{Qf}\, N_0 \,.\, \Sigma(u,N_0)\, \varepsilon \text{Q} \,.\, v\varepsilon\, \text{Qf}\, N_0 \,.\, \text{l}'v\text{'}N_0\, \varepsilon \text{Q} \,.\supset.\, \Sigma(v\times u, N_0)\, \varepsilon \text{Q}$
[Hp $.\supset.\ \Sigma(v\times u, N_0) \leqq (\text{l}'\, v\text{'}N_0)\,\Sigma(u,N_0) \,.\supset.$ Ths]

·3 $k\, \varepsilon \text{Cls'Q} \,.\, a\varepsilon \text{Q} \,.\supset.\, \Sigma ak = a\Sigma k$

·4 $u\varepsilon\, \text{Qf}\, N_0 \,.\, \Sigma(u,N_0)\, \varepsilon \text{Q} \,.\supset.\, 0\varepsilon\, \text{Lm}(nu_n\,|n)$

·41 $u\varepsilon\, \text{qf}\, N_0 \,.\, \text{Lm}\, \Sigma(u, 0\cdots n)\,|n \supset \text{q} \,.\, a\varepsilon\, (\text{Qf}\, N_0)\text{decr} \,.\, \lim a = 0 \,.\supset.$
$\Sigma(au, N_0)\, \varepsilon \text{q}$ { ABEL t.1 p.222 }

·5 $u,v\varepsilon\, \text{Qf}\, N_0 \,.\, \Sigma(u,N_0), \Sigma(v,N_0)\, \varepsilon \text{Q} \,.\supset.$
$\Sigma\{\Sigma(u_m v_{n-m}\,|m, 0\cdots n)\,|n, N_0\} = \Sigma(u,N_0) \times \Sigma(v,N_0)$

·5 $u,v\varepsilon\, \text{Qf}\, N_0 \,.\, u_0+u_1+\ldots,\ v_0+v_1+\ldots\, \varepsilon \text{Q} \,.\supset.$
$u_0v_0+(u_0v_1+u_1v_0)+(u_0v_2+u_1v_1+u_2v_0)+\ldots = (u_0+u_1+\ldots)(v_0+v_1+\ldots)$
{ CAUCHY a.1821 p.127 }
[$p\varepsilon N_1 \,.\supset.\ \Sigma[u, 0\cdots \text{E}\, p/2)] \times \Sigma[v, 0\cdots \text{E}\, p/2)] < \Sigma[\Sigma(u_m v_{n-m}\,|m, 0\cdots n)\,|n,$ $0\cdots p] < \Sigma(u, 0\cdots p) \times \Sigma(v, 0\cdots p) \,:\supset.$ P]

·6 $a\varepsilon\, (\text{Qf}\, N_0)\, \text{decr}_0 \,.\, \Sigma(a,N_0) = \infty \,.\, n\varepsilon N_1 \,.\, h\varepsilon\, 0\cdots(n-1) \,.\supset.$
$\Sigma(a,\ n\times N_0+h) = \infty$

$/\ \Sigma$ ❋ 14·1 $\Sigma\, /N_1 = \infty$ { LEIBNIZ a.1673 MathS. t.1 p.49 }

·2 $a,b\varepsilon \text{Q} \,.\supset.\, \Sigma\, /(a+N_0 b) = \infty$

·3 $1 = /(1.2)+/(2.3)+/(3.4)+\ldots$ [P12·1 . $u_n = /n+1) \,.\supset.$ P]
{ BROUNCKER a.1668 LondonT. t.3 p.645 }

·4 $a\varepsilon\, \text{q}-(-N_1) \,.\supset.\, /(a+1) = /[(a+1)(a+2)]+/[(a+2)(a+3)]+\ldots$
{ STIRLING a.1730 p.23 } Continuation : P21·6

·5 $m\varepsilon N_1 \,.\supset.\, (1+/2+\ldots+/m)/m = /[1(m+1)]+/[2(m+2)]+\ldots$
{ MACLAURIN a.1742 p.295 }

·6 $a\varepsilon\, \text{q}-(-N_0) \,.\, m\varepsilon N_1 \,.\supset.\, [/a+/(a+1)+\ldots+/(a+m-1)]\,/m =$
$/[a(a+m)]+/[(a+1)(a+m+1)]+\ldots$ { MACLAURIN a.1742 p.298 }

❋ 15. $u,v\varepsilon\, \text{Qf}\, N_0 \,.\supset.$

·1 $\text{l}'(u/v\ \text{'}N_0)\, \varepsilon \text{Q} \,.\, \Sigma(v,N_0)\, \varepsilon \text{Q} \,.\supset.\, \Sigma(u,N_0)\, \varepsilon \text{Q}$ [= P13·2]

·2 $h\varepsilon\theta \,.\, m\varepsilon N_1 \,:\, n\varepsilon\, m+N_0 \,.\supset_n.\, u_{n+1}/u_n < h \,:\supset.\, \Sigma(u,N_0)\, \varepsilon \text{Q}$
[Hp . $r\varepsilon N_1 \,.\supset.\ u_{n+r} < u_n h^r$ (1)
Hp . (1) $.\supset.\ \Sigma(u_{n+r}\,|r, N_1) < u_n\, /(1-h) \,.\supset.$ P]

·21 $\max \mathrm{Lm}(u_{n+1}/u_n \,|\, n) < 1 \,.\supset.\, \Sigma(u,N_0)\,\varepsilon Q$

·22 $\lim (u_{n+1}/u_n)|n \;\varepsilon\; \theta \cup \iota 0 \,.\supset.\, \Sigma(u,N_0)\,\varepsilon Q$

·23 ——————— $\varepsilon\ 1+Q$ ——————— $= \infty$

{ CAUCHY a.1821 p.123:

« Si pour des valeurs croissantes de n, le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ converge vers une limite fixe k, la série sera convergente toutes les fois que l'on aura $k<1$, et divergente toutes les fois que l'on aura $k>1$. »}

·3 $\Sigma(u,N_0) = \infty \,.\supset.\, \Sigma\{[u_{n+1}/\Sigma(u,0\cdots n)]\,|n, N_0\} = \infty$

{ ABEL a.1828 t.1 p.400 }

·4 $u,r\,\varepsilon\, \mathrm{Qf}N_0 : r\varepsilon N_0 \,.\supset_r.\, u_{r+1}/u_r < r_{r+1}/r_r : \Sigma(r,N_0)\,\varepsilon Q :\supset.$
$\Sigma(u,N_0)\,\varepsilon Q$

[Hp $.\supset.$ $(u_r/r_r)\,|r \;\varepsilon\; (\mathrm{Qf}N_0)\mathrm{decr}$ $.\supset.$ $\Gamma(u/r)`N_0 = u_0/r_0$. P·1 $.\supset.$ Ths]

$\upharpoonleft\ \Sigma$ ✻ 16. $u\,\varepsilon\, \mathrm{Qf}N_0 \,.\supset:$

·1 $\max \mathrm{Lm}\sqrt[n]{u_n}\,|n < 1 \,.\supset.\, \Sigma(u,N_0)\,\varepsilon Q$

·11 ——————————— $>1 \,.\supset.$ ——— $= \infty$

[Hp . $m\varepsilon N_1$ $.\supset.$ $\exists\,(m+N_0) \cap n \ni (u_n > 1)$ $.\supset.$ $\lim u -= 0$ $.\supset.$ P]

{ CAUCHY a.1821 p.121:

« Cherchez la limite ou les limites vers lesquelles converge, tandis que n croît indéfiniment, l'expression $(u_n)^{\frac{1}{n}}$, et désignez par k la plus grande de ces limites, ou, en d'autres termes, la limite des plus grandes valeurs de l'expression dont il s'agit. La série sera convergente si l'on a $k<1$, et divergente si l'on a $k>1$. »}

·12 $h\varepsilon Q \,.\, \infty \;-\varepsilon\; \mathrm{Lm}\, n^{1+h}u_n \,|n \,.\supset.\, \Sigma(u,N_0)\,\varepsilon Q$ { CAUCHY id. }

·2 $x\varepsilon \pm\theta \,.\supset.\, /(1-x) = 1+x+x^2+\ldots$

{ MERCATOR *Logarithmo-technia* a.1668 p.25 p.30 }

$(1-x)^{-2} = 1+2x+3x^2+\ldots$

$(1-x)^{-3} = 1+3x+6x^2+\ldots+n(n+1)/2\, x^n+\ldots$ Cont. P23

·3 $\Sigma(2\upharpoonleft -N_1) = 1$

·4 $u\varepsilon\, \mathrm{Cls}`N_1 \,.\supset.\, \Sigma 2^{-u}\,\varepsilon\,\Theta$ ·5 $\Theta = \Sigma[(2^{-u})\,|u`(\mathrm{Cls}`N_1)]$

·6 $\Sigma 2\upharpoonleft(-N_1^{\,2})\,\varepsilon\, Q-R$

·61 $\Sigma N\upharpoonleft-(2\upharpoonleft N_0)\,\varepsilon\, Q-R$ { D.BERNOULLI a.1729 *CorrM.* t.2 p.326 }

·7 $m\varepsilon\, 1+Q \,.\supset.\, \Sigma N_1^{-m}\,\varepsilon Q$ { MACLAURIN a.1742 p.290 }

·8 $m\varepsilon\, 1+Q \,.\supset.\, \Sigma(2N_0+1)^{-m} = (1-2^{-m})\Sigma N_1^{-m}$

{ Joh. BERNOULLI t.4 p.11 }

[$\Sigma N_1^{-m} = \Sigma(2N_1)^{-m} + \Sigma(2N_0+1)^{-m}$. $\Sigma(2N_1)^{-m} = 2^{-m}\Sigma N_1^{-m}$ $.\supset.$ P]

·9 $\Sigma(1+N_1)\sqrt{}(-1-N_1)=1$ } Leibniz a.1673 MathS. t.1 p.49 {

·91 $p\varepsilon 1+N_1 . a\varepsilon R . \supset .$

$\Sigma[p\sqrt{}(-n^2)|n, N_0], \Sigma[(-1)^n p\sqrt{}(-n^2)|n, N_0], \Sigma[a^n p\sqrt{}(-n^2)|n, N_0] \varepsilon$ Q-R

} Eisenstein JfM. a.1843 p.193 {

Num Σ ✻ 17.

·1 $x\varepsilon\theta . \supset . \Sigma[x^n/(1-x^n)|n, N_1] = \Sigma\{\text{Num}(N_1 \frown n/N_1)\times x^n |n, N_1\}$

} Lambert *Architechtonik* a.1771 t.2 p.507 {

·2 $x\varepsilon\theta . \supset . \Sigma[nx^n/(1-x^n)|n,N_1] = \Sigma\{\text{Num}[N_1 \frown n/(N_1+1)]x^n|n,N_1\}$

} Euler PetrNC. t.5 a.1760 p.70 {

Σ mod ✻ 18.

·1 $u\varepsilon$ qf$N_0 . \Sigma(\text{mod}u, N_0)\varepsilon Q . \supset . \Sigma(u,N_0)\varepsilon$ q } Cauchy a.1821 p.129 {

[Hp $. \supset . u = [(\text{mod}u + u) - (\text{mod}u - u)]/2 . \supset .$ mod$u + u$, mod$u - u$
$\varepsilon\, Q_0 f N_0 . \Sigma[(\text{mod}u+u)+(\text{mod}u-u), N_0]/2 = \Sigma(\text{mod}u, N_0)\,\varepsilon\, Q . \supset .$
$\Sigma(\text{mod}u + u, N_0) , \Sigma(\text{mod}u - u, N_0)\,\varepsilon Q_0 . \supset .$ Ths]

·2 $u\varepsilon$ qf$N_0 . \Sigma(\text{mod}u, N_0)\varepsilon Q . r\varepsilon(N_0 f N_0)$rcp $. \supset . \Sigma(ur, N_0) = \Sigma(u,N_0)$

} Dirichlet JfM. a.1829 {

·3 $u\varepsilon$ qf$N_0 . \Sigma(u,N_0)\varepsilon$ q $. \Sigma(\text{mod}u, N_0) = \infty . h\varepsilon$ q $\cup\, \iota\infty \cup \iota(-\infty) . \supset .$

$\exists\, (N_0 f N_0)\text{rcp} \frown r\ni[\Sigma(ur, N_0) = h]$ } Riemann a.1854 p.221 {

·4 $u\varepsilon$ Qf$N_0 . \Sigma(u,N_0) = \infty . \lim u = 0 . a\varepsilon$ q $. \supset .$

$\exists\, (\iota 1 \cup \iota-1)fN_0 \frown t\ni[a = \Sigma(tu, N_0)]$

} Mansion a.1887 *Rés. du cours d'Analyse inf.*, Paris p.281 {

·5 $k\varepsilon$ Cls . Num$k$ = Num $N_0 . f\varepsilon$ qf$k . \Sigma(\text{mod}f, k)\varepsilon Q . \supset . \Sigma(f,k)\varepsilon$ q

Ex.: P19·1.

·6 $u\varepsilon(qFN_0)$decr $. \lim u = 0 . \Sigma\text{mod}u = \infty . \Sigma u\,\varepsilon$ q $. \supset .$

$\lim[\Sigma(\text{sgn}u, 0\cdots n)/n] |n = 0$ } Cesàro *Anal. Alg.* p.164 {

✻ 19·1 $u\varepsilon$ qf$(N_0;N_0) . \Sigma[\text{mod}u_{r,s} | (r;s), (N_0;N_0)]\,\varepsilon Q . \supset .$

$\Sigma\{\Sigma(u_{r,s}|r, N_0)|s, N_0\} = \Sigma\{\Sigma(u_{r,s}|s, N_0)|r, N_0\}$

·2 Hp·1 $. r\varepsilon\{(N_0;N_0)fN_0\}$rcp $. \supset . \Sigma(ur, N_0) = \Sigma\{\Sigma(u_{r,s}|r, N_0)|s,N_0\}$

} ·1·2 Cauchy a.1821 p.445 {

$u,r\varepsilon$ qf$N_0 . \supset$:

·3 $\Sigma(\text{mod}u, N_0), \Sigma(\text{mod}r, N_0)\,\varepsilon Q . \supset .$

$\Sigma(u,N_0)\times\Sigma(r,N_0) = \Sigma[\Sigma(u_m r_{n-m}|m, 0\cdots n)|n, N_0]$

} Cauchy a.1821 p.132 {

·4 $\Sigma(u,N_0), \Sigma(r,N_0), \Sigma[\Sigma(u_m r_{n-m}|m, 0\cdots n)|n, N_0]\,\varepsilon$ q $. \supset .$ Ths P·3

} Abel a.1826 1 p.226 {

·5 $\Sigma(\text{mod}u, N_0)\,\varepsilon Q . \Sigma(r,N_0)\,\varepsilon$ q $. \supset .$ ThsP·3

} Mertens a.1875 JfM. t.79 p.182 {

·6 $u \varepsilon \mathrm{q\,f}(N_0 : N_0) . \Sigma[\mathrm{l}'[\mathrm{mod}\, u(m,n)|m \,`N_0]|n, N_0] \varepsilon Q :$
$n \varepsilon N_0 . \supset_n . \lim u(m,n)|m \,\varepsilon \mathrm{q} : \supset . \lim \Sigma[u(m,n)|n, N_0]|m$
$= \Sigma[\lim u(m,n)|m]|n, N_0]$ $\}$ Comm(Σ, lim) $\{$

·61 $k \varepsilon \mathrm{Cls}`\mathrm{q} . a \varepsilon \delta k . u \varepsilon \mathrm{q\,f}(k : N_0) . \Sigma\{\mathrm{l}'[\mathrm{mod}\, u(x,n)|x \,`k]|n, N_0\} \varepsilon$
$Q : n \varepsilon N_0 . \supset_n . \lim[u(x,n)|x, k, a] \varepsilon \mathrm{q} : \supset .$
$\lim\{\Sigma[u(x,n)|n,N_0]|x,k,a\} = \Sigma\{\lim[u(x,n)|x,k,a]|n,N_0\}$

Ex. : §cont 3·3.

Soit u une fonction de deux variables entières m, n. La série $\Sigma[u(m,n)|n, N_0]$ est convergente, pour toute valeur de m, lorsque (P1·3) :
$m \varepsilon N_0 . \supset : h \varepsilon Q . \supset_h . \exists\, N_0 \cap p \ni \{q \varepsilon p + N_0 . \supset_q . \mathrm{mod}\Sigma[u(m,r)|r, p \cdots q] < h\}$
Quelques A. (Cauchy a.1821 p.131) ont confondu cette condition avec la
$h \varepsilon Q . \supset_h . \exists\, N_0 \cap p \ni \{m \varepsilon N_0 . q \varepsilon p + N_0 . \supset_{m,q} . \mathrm{mod}\Sigma[u(m,r)|r, p \cdots q] < h\}$
Abel (t.1 p.224) en a noté la valeur différente. On dit que la série u est de convergence « gleichmässig » (Weierstrass a.1841 t.1 p.67) « uniforme, in egual grado », si elle satisfait à la dernière condition. Sont des conditions quelque peu différentes les convergences uniformes « in generale » (Dini a.1878 p.102), « semplice » (id. p.103), « a tratti » (Arzelà a.1900 BolognaM. p.711).

Puisque nous n'avons pas introduit un symbole exprès pour indiquer « série convergente », il ne convient pas d'introduire des symboles pour indiquer les différentes espèces de convergence.

Nous donnons à ces théorèmes la forme sous laquelle ils se présentent dans les applications. Voir §S 11·12.

Dans la P·61, au lieu d'une variable entière m, on considère une x, dont la variabilité est k.

Π ✻ 20.

·0 $u \varepsilon \mathrm{qf}N_0 . \supset . \Pi(u, N_0) = u_0 u_1 \ldots = \lim \Pi(u, 0 \cdots n)|n$ Df

·01 $m \varepsilon \mathrm{n} . u \varepsilon \mathrm{qf}(m + N_0) . \supset .$
$\Pi(u, m + N_0) = u_m u_{m+1} \ldots = \lim \Pi(u, m \cdots m+n)|n$ Df

·1 $u \varepsilon \mathrm{Qf}N_0 . \Pi(u, N_0) \varepsilon Q . \supset . \lim u = 1$

·2 $a, b \varepsilon Q . a < b . \supset . \Pi[(a+r)/(b+r)|r, N_0] = 0$

·3 » $a > b$ » » » » $= \infty$

·4 $p \varepsilon 1 + N_1 . \supset . \Pi[(1 - p^{-n})|n, N_1] \varepsilon Q\text{-}R$ $\}$ Eisenstein a.1844 p.39 $\{$

·5 $x \varepsilon \mathrm{q} . \mathrm{mod}x < 1 . \supset . /(1-x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8) \ldots$
$= \Pi\{[1 + x\uparrow(2^n)]|n, N_0\}$ $\}$ Euler a.1748 p.273 $\{$

✻ 21.

·1 $u \varepsilon \mathrm{Qf}N_0 . \supset : \Pi(1+u, N_0) \varepsilon Q . = . \Sigma(u, N_0) \varepsilon Q$

·2 $u \varepsilon \theta \mathrm{f}N_0 . \supset : \Pi(1-u, N_0) \varepsilon Q . = . \Sigma(u, N_0) \varepsilon Q$

·3 ——————— $\Pi(1-u, N_0) = 0 . = . \Sigma(u, N_0) = \infty$

·4 $u \varepsilon (-1+\mathrm{Q})\mathrm{f}\mathrm{N}_0 \,.\, \Sigma(u,\mathrm{N}_0) . \Sigma(u^2,\mathrm{N}_0)\, \varepsilon \mathrm{Q} \;.\supset.\; \Pi(1+u, \mathrm{N}_0)\, \varepsilon \mathrm{Q}$

·5 ——————— $. \Sigma(u,\mathrm{N}_0)\, \varepsilon \mathrm{Q} \,.\, \Sigma(u^2,\mathrm{N}_0) = \infty \;.\supset.\; \Pi(1+u, \mathrm{N}_0) = 0$

{ ·4-·5 Cauchy a.1821 p.460 }

·6 $a \varepsilon \mathrm{q}{-}\mathrm{N}_0 \,.\, m \varepsilon \mathrm{N}_1 \;.\supset.$

$m\Sigma\{/\Pi(a+r+0\cdots m) \,|\, r, \mathrm{N}_0\} = /\Pi[a+0\cdots(m-1)]$

{ Joh. Bernoulli a.1692 t.1 p.521 }

Σ Π ! ❋ 22.

·1 $a \varepsilon (\mathrm{N}_1 \mathrm{f} \mathrm{N}_1)\mathrm{cres} \;.\supset.\; \Sigma\{[/\Pi(a, 1\cdots n)] \,|\, n, \mathrm{N}_1\}\, \varepsilon\, \mathrm{Q}{-}\mathrm{R}$

——————— $.\supset.\; /a_1 + /(a_1 a_2) + /(a_1 a_2 a_3) + \ldots\, \varepsilon\, \mathrm{Q}{-}\mathrm{R}$

{ Stern a.1848 JfM. p.95 }

·2 $a \varepsilon \mathrm{N}_1 \;.\supset.\; \Sigma a{\upharpoonleft}{-}(\mathrm{N}_1!)\, \varepsilon\, \mathrm{Q}{-}\mathrm{R}$

·3 $a \varepsilon \mathrm{q} \;.\supset.\; \lim(a^n/n!) \,|\, n = 0$

·4 $\lim {}^n\!\sqrt{(n!)} \,|\, n = \infty$ { Cauchy a.1821 p.64 }

·5 $1 = /2!+2/3!+3/4!+\ldots = \Sigma[\, n/(n+1)! \,|\, n, \mathrm{N}_1 \,]$

{ Joh. Bernoulli a.1692 t.1 p.525 }

·6 $a \varepsilon 1+\mathrm{Q} \;.\supset.\; /(a-1) = \Sigma\{ n!/\Pi(a+1\cdots n) \,|\, n, \mathrm{N}_1 \}$

{ Stirling a.1730 p. 11 }

C 23·1 $m \varepsilon \mathrm{q} \,.\, x \varepsilon \mathrm{q} \,.\, \mathrm{mod}x < 1 \;.\supset.$

$(1+x)^m = \Sigma[\mathrm{C}(m,n)x^n \,|\, n, \mathrm{N}_0] =$

$1 + mx + m(m-1)/2!\, x^2 + \ldots + m(m-1)\ldots(m-n+1)/n!\, x^n + \ldots$

{ Newton 13 Junii a.1676 :

« Sed Extractiones Radicum multum abbreviantur per hoc *Theorema*.

$$\overline{\mathrm{P+PQ}}\Big|^{\frac{m}{n}} = \mathrm{P}^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}\mathrm{AQ} + \frac{m-n}{2n}\mathrm{BQ} + \frac{m-2n}{3n}\mathrm{CQ} + \frac{m-3n}{4n}\mathrm{DQ} + \&c.$$

ubi P+PQ significat Quantitatem cujus Radix, vel etiam Dimensio quævis, vel Radix Dimensionis, investiganda est, P primum terminum quantitatis ejus; Q, reliquos terminos divisos per primum. Et $\frac{m}{n}$ numeralem Indicem dimensionis ipsius P+PQ: Sive dimensio illa integra sit; sive (ut ita loquar) fracta; sive affirmativa, sive negativa.

Nam, sicut analystae, pro aa, aaa, &c. scribere solent a^2, a^3, &c. sic ego, pro $\sqrt{a}$, $\sqrt{a^3}$, $\sqrt{\mathrm{C}a^5}$ &c. scribo $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{3}{2}}$, $a^{\frac{5}{3}}$, . . .

Et sic pro $\dfrac{aa}{\sqrt{\mathrm{C} : a^3 + bbx}}$, scribo $aa \times \overline{a^3+bbx}\Big|^{-\frac{1}{3}}$

... Denique, pro terminis inter operandum inventis in quoto, usurpo A, B, C, D, &c. Nempe A pro primo termino $\mathrm{P}^{\frac{m}{n}}$; B pro secundo $\frac{m}{n}$ AQ; & sic deinceps. » }

Dem : voir §cont 3·4

·2 $m \varepsilon -1+\mathrm{Q} \;.\supset.\; 2^m = \Sigma[\mathrm{C}(m,n) \,|\, n, \mathrm{N}_0]$ {ABEL a.1826 t.1 p.245}

·3 $m \varepsilon \mathrm{Q} \;.\supset.\; 0 = \Sigma[(-1)^n \mathrm{C}(m,n) \,|\, n, \mathrm{N}_0]$ »

·4 Hp·1 $.\supset.\; (1-x)^{-m} = \Sigma[\mathrm{C}(m+n, n).x^n \,|\, n, \mathrm{N}_0]$

·5 $m \varepsilon \mathrm{q} \,.\, x \varepsilon \mathrm{Q} -/2 \;.\supset.\; (1+x)^m = \Sigma\{\mathrm{C}(m+n,n)[x/(1+x)]^n \,|\, n, \mathrm{N}_0\}$

sgn ✽ 24.

·1 $k \varepsilon 1+\mathrm{Q} \,.\, x \varepsilon \mathrm{q} \;.\supset.\; \mathrm{sgn}\,x = \lim (k^{xn} - k^{-xn})/(k^{xn}+k^{-xn}) \,|\, n$

·2 $x \varepsilon \mathrm{r} \;.\supset.\; \lim [\beta(n!x)+\beta(-n!x)] \,|\, n = \lim (\mathrm{sgn}\,\beta\, n!x) \,|\, n = 0$

·21 $x \varepsilon \mathrm{q}\text{-}\mathrm{r} \;.\supset.$ » » » » » $=1$

max min ✽ 25.

·1 $u \varepsilon \mathrm{Cls'Q} \,.\, \mathrm{Num}\,u \,\varepsilon \mathrm{N}_1 \;.\supset.\; \lim [(\Sigma u^{n+1})/(\Sigma u^n)] \,|\, n = \max u$

{ D. BERNOULLI *PetrC.* t.3 }

·2 Hp·1 $.\supset.\; \lim \sqrt[n]{\Sigma(u^n)} \,|\, n = \max u \,.\, \lim (\Sigma u^{-n})^{-/n} \,|\, n = \min u$

{ ENCKE a.1841 JfM. t.22 }

Chf ✽ 26. $x \varepsilon \mathrm{q} \;.\supset.$

·1 $x = \mathrm{E}x + \Sigma[\mathrm{X}^{-n}\mathrm{Chf}(\mathrm{X}^n x) \,|\, n, \mathrm{N}_1]$

La P·1 donne l'expression d'un nombre sous forme de fraction décimale.

Np ✽ 31.

·0 $\lim [\mathrm{Num}(\mathrm{Np} \frown 1 \cdots n)/n] \,|\, n = 0$ { LEGENDRE a.1797 p.464 }

·1 $\lim \{[\max[\mathrm{Np} \frown (1+4(1\cdots n)^2)/\mathrm{N}_1]] /n\} \,|\, n = \infty$

{ TCHEBYCHEF ; Voir MARKOFF a.1895 ParisCR. t.120 p.1032 }

·2 $\lim \{\mathrm{Num}[\mathrm{Np} \frown (4\mathrm{N}_0+3) \frown (1\cdots n)] - \mathrm{Num}[\mathrm{Np} \frown (4\mathrm{N}_0+1) \frown (1\cdots n)]\} \,|\, n = \infty$

·3 lim{—————————— / ——————————}|—=1

·4 lim{{—————————— — ——————————}

/Num[Np ⁀ 1···E√n] } |n =/2

{·2-·3 TCHEBYCHEF a.1853 t.1 p.697 ; ·4 CESÀRO a.1896, NapoliR.}

·5 $m \varepsilon 1+\mathrm{Q} \;.\supset.\; \Sigma \mathrm{N}_1^{-m} = \Pi[/(1-n^{-m}) \,|\, n, \mathrm{Np}]$

{ EULER a.1744 *PetrC.* t.9 p.172 ; a.1748 p.225 }

·6 $a,b \varepsilon \mathrm{N}_1 \,.\, \mathrm{D}(a,b) = 1 \;.\supset.\; \Sigma\, /\{\mathrm{Np} \frown (a\mathrm{N}_0+b)\} = \infty$

{ DIRICHLET a.1837 t.1 p.313 }

Continuation : §cont §D §e §*C* §q_n P24 §vct P20-21.

§73 cont = (fonction continue)

δ lim ✻ 1. $u \varepsilon \text{Cls'q} \,.\, u \supset \delta u \,.\supset\therefore$

·0 $f \varepsilon (\text{qf}u)\text{cont} \,.=:\, f \varepsilon \text{qf}u : x \varepsilon u \,.\supset_x .\, \lim(f,u,x) = fx$ Df

·01 » $.=:$ » $: k \varepsilon \text{Q} \,.\, x \varepsilon u \,.\supset_{k,x} .$

$\exists\, \text{Q} \frown h \ni [\, y \varepsilon u \,.\, \text{mod}(y-x) < h \,.\supset_y .\, \text{mod}(fy-fx) < k \,]$

Note. « cont » signifie « fonction continue ». La définition P·0 se rencontre dans Abel t.1 p.223. La P·01 est une transformation de la ·0, où l'on a remplacé le signe « lim » par sa valeur.

·1 $\text{l'mod}u\, \varepsilon \text{Q} \,.\, u = \delta u \,.\, f \varepsilon (\text{qf}u)\text{cont} \,.\, k \varepsilon \text{Q} \,.\supset .$

$\exists\, \text{Q} \frown h \ni [\, x,y \varepsilon u \,.\, \text{mod}(y-x) < h \,.\supset_{x,y} .\, \text{mod}(fy-fx) < k \,]$

Le second membre de la P·1 contient les mêmes éléments que la P·01, différemment groupés. Heine, JfM. a.1870 t.71 p.361 a reconnu la valeur logique différente des P·01 et ·1. La P·1 a été démontrée par Heine, JfM. a.1871 t.74 p.188, Lüroth, MA. t.6 a.1873 p.319.

✻ 2. $a,b \varepsilon \text{q} \,.\, a -\!= b \,.\, f \varepsilon (\text{qf}\, a \dashv b)\text{cont} \,.\supset:$

·1 $fa < 0 \,.\, fb > 0 \,.\supset .\, 0 \varepsilon f`(a^{-}b)$ } Cauchy a.1821 note 3 }

[$y = \text{l'}\, x \ni [fx < 0] \,.\supset .\, y \varepsilon a^{-}b \,.\, fy = 0$]

·2 $fa^{-}fb \supset f`(a^{-}b)$

·3 $\exists\, \iota \max f`(a \dashv b)$ . $\exists\, \iota \min f_{|}`(a \dashv b)$

} Weierstrass ; Cfr. G. Cantor JfM. t.72 p.141, t.73 p.296 }

[$y = \text{l'}\, x \ni [x \varepsilon a \dashv b \,.\, \text{l'}\, f`(a \dashv x) < \text{l'}\, f`a \dashv b] \,.\supset .\, y \varepsilon a \dashv b \,.\, fy = \max f`(a \dashv b)$]

✻ 3·1 $f \varepsilon (\text{qfq})\text{cont} : y,z \varepsilon \text{q} \,.\supset_{y,z} .\, f(y+z) = fy + fz : x \varepsilon \text{q} \,:\supset .$

$fx = (f1) \times x$

[$\text{Hp} \,.\supset .\, f(0+0) = f0 + f0 \,.\supset .\, f0 = 0$ (1)

$\text{Hp} \,.\, x \varepsilon \text{q} \,.\supset .\, f[x+(-x)] = fx + f-x \,.\, (1) \,.\supset .\, f-x = -fx$ (2)

$\text{Hp} \,.\, n \varepsilon \text{N}_1 \,.\, x \varepsilon \text{qF}1\cdots n \,.\supset .\, f(\Sigma x) = \Sigma (fx)$ (3)

$\text{Hp} \,.\, n \varepsilon \text{N}_1 \,.\, x \varepsilon \text{q} \,.\, (3) \,.\supset .\, f(nx) = nfx$ (4)

$\text{Hp} \,.\, x \varepsilon \text{q} \,.\, m \varepsilon \text{n} \,.\, (1) \,.\, (2) \,.\, (4) \,.\supset .\, f(mx) = mfx$ (5)

$\text{Hp} \,.\, x \varepsilon \text{q} \,.\, n \varepsilon \text{N}_1 \,.\, (1) \,.\supset .\, f[n(x/n)] = nf(x/n) \,.\supset .\, f(x/n) = (fx)/n$ (6)

$\text{Hp} \,.\, x \varepsilon \text{q} \,.\, m \varepsilon \text{n} \,.\, n \varepsilon \text{N}_1 \,.\, (5) \,.\, (6) \,.\supset .\, f[(m/n)x] = f[m(x/n)] = (m/n)fx$ (7)

$\text{Hp} \,.\, x \varepsilon \text{q} \,.\, y \varepsilon \text{r} \,.\, (7) \,.\supset .\, f(yx) = yfx$ (8)

$\text{Hp} \,.\, x \varepsilon \text{r} \,.\, (1,x)|(x,y)\text{P}(8) \,.\supset .\, fx = x(f1)$ (9)

$\text{Hp} \,.\, x \varepsilon \text{q-r} \,.\supset .\, fx = \lim(fy|y, \text{r}, x) = \lim[y(f1)|y, \text{r}, x)] = xf1$ (10)

$(9) \,.\, (10) \,.\supset .\, \text{P}$]

·2 $f \varepsilon (\mathrm{qfq})\mathrm{cont} : y,z \varepsilon \mathrm{q} . \supset_{y,z} . f(y+z) = fy \times fz : x \varepsilon \mathrm{q} :\supset.$
$fx = (f1) \upharpoonright x$ { ·1·2 CAUCHY a.1821 p.103 }

·3 Hp P1 . $f \varepsilon \mathrm{qf}(u:\mathrm{N}_0) : n \varepsilon \mathrm{N}_0 . \supset_n . f(x,n) \,|x\; \varepsilon (\mathrm{qf}u)\mathrm{cont} :$
$\Sigma\{\mathrm{l}'[\mathrm{mod} f(x,n) \,|x \text{ ' } u] \,|n, \mathrm{N}_0\} \;\varepsilon \mathrm{Q} :\supset. \Sigma[f(x,n) \,|n, \mathrm{N}_0] \,|x\; \varepsilon\; (\mathrm{qf}u)\mathrm{cont}$
[§lim 19·61 .⊃. P]

·4 §lim P23·1 Dm

[$x \varepsilon \mathrm{q} . \mathrm{mod}x < 1 . m \varepsilon \mathrm{q} .\supset.$
$\lim \mathrm{mod}\{[\mathrm{C}(m,n+1)x^{n+1}] / [\mathrm{C}(m,n)x^n]\}\,|n = \mathrm{mod}x$ (1)
Hp(1) . §lim 15·2 .⊃. $\Sigma[\mathrm{modC}(m,n)x^n \,|n, \mathrm{N}_0] \;\varepsilon \mathrm{Q}$ (2)
Hp(2) . §lim 18·1 .⊃. $\Sigma[\mathrm{C}(m,n)x^n \,|n, \mathrm{N}_0] \;\varepsilon \mathrm{q}$ (3)
$x \varepsilon \mathrm{q} . \mathrm{mod}x < 1 . f = \Sigma[\mathrm{C}(m,n)x^n \,|n, \mathrm{N}_0]\,|m . (3) .\supset. f \varepsilon (\mathrm{qfq})\mathrm{cont}$ (4)
Hp(4) .⊃. $f1 = 1+x$ (5)
Hp(4) . $m,n \varepsilon \mathrm{q}$. §lim 19·3 .⊃. $(fm) \times (fn) =$
$\Sigma\{\Sigma[\mathrm{C}(m,r)\mathrm{C}(n,s-r)x^s \,|r, 0\cdots s] \,|s, \mathrm{N}_0\}$ (6)
Hp(6) . §C 6·31 .⊃. $(fm) \times (fn) = f(m+n)$ (7)
Hp(4) . (5) . (6) . §cont 3·2 .⊃: $m \varepsilon \mathrm{q} .\supset. fm = (1+x)^m$ (8)
(8) ⊃ P]

Cette démonstration pour m rationnel est due à Euler, a.1774 PetrNC. t.19 p.109. Abel a.1826 t.1 p.223, a étudié la série binomiale pour toutes les valeurs de x et de m.

§74. D = (dérivée)

$+ \; - \; \times \; / \;$ q δ lim ✻ 1.

·1 $k \varepsilon$ Cls'q . $k \supset \delta k$. $f \varepsilon$ qf$k$. $x \varepsilon k$.⊃.
$D(f,k,x) = \lim[(fy - fx)/(y-x) \, |y, k, x]$ Df D

·11 Hp·1 .⊃. $D(f,k,x) = \lim\{[f(x+h) - fx]/h \, |h, k-x, 0\}$ Dfp

·2 $k \varepsilon$ Cls'q . $k \supset \delta k$. $f \varepsilon$ qFk . $x \varepsilon k$.⊃.
$Dfx = \lim[(fy - fx)/(y-x) \, |y$, Variab$f$, $x]$ Df

·3 Hp·2 .⊃. $Df = (Dfx \, |x$, Variab$f)$ Df

Note.

Pour avoir une dérivée il faut donner une fonction f, la classe k des valeurs de la variable, dans laquelle la fonction est définie, et une valeur particulière x, appartenant à la classe k; il appartient aussi à sa dérivée δk, si $k \supset \delta k$.

Nous l'indiquons par $D(f,k,x)$, qu'on pourra lire « la dérivée de la fonction f, considérée dans la classe k, pour la valeur x de la variable ». Ce symbole représente, par définition P·1 « la limite du rapport $(fy-fx)/(y-x)$, la limite étant obtenue en faisant varier y, dans la classe k, vers x ».

La classe k coïncide dans la pratique avec la classe q (ex. P3·1), ou Q (ex. P3·4), ou est un intervalle, ou l'ensemble q$-\iota$0 (ex. P3·2), ou a des formes plus compliquées.

Si l'on fait varier la classe k, la dérivée ne change pas dans §e 4·1 §q' 15·1. Elle peut changer dans d'autres cas.

On a p.ex : $D(\text{mod}, Q_0, 0) = 1$, $D(\text{mod}, -Q_0, 0) = -1$

Quelques A. appellent « dérivée à droite » l'expression $D(f, x+Q_0, x)$; $D(f, x-Q_0, x)$ est la « dérivée à gauche ».

Si au lieu de donner la fonction f, l'on donne l'expression contenant une variable x, il suffit d'écrire après cette expression le signe $|x$, pour avoir la fonction f. Dans $(fx)|x$ la lettre x est apparente; en conséquence il ne faut pas la confondre avec la x qu'on peut rencontrer dans une autre place de la même formule.

La notation que nous adoptons satisfait aux lois sur les définitions; rien ne doit être sous-entendu, ou ajouté par le langage ordinaire.

Mais, pour nous rapprocher des notations communes, on peut considérer l'ensemble de la fonction f et de la classe k dans laquelle cette fonction est censée définie, comme un objet seul. Si nous l'indiquons simplement par f, on aura $f \varepsilon$ qFk. La P·2 définit alors Dfx, qu'on doit considérer comme décomposée en $(Df)x$ « dérivée de f, pour la valeur x », et non en $D(fx)$, car on ne dérive pas le nombre fx.

La ·3 donne la définition du symbole Df.

Leibniz indique la dérivée de y par rapport à x, par le signe $\frac{dy}{dx}$, où « recta aliqua pro arbitrio assumpta vocetur dx » (MathS. t.5 p.220) et « ipsas dx, dy, ut ipsarum x,y differentiis sive incrementis, vel decrementis momentaneis proportionales haberi posse » (p.169). Dans quelques cas il pose $d\bar{x}=1$; alors le signe d indique la dérivée; comme dans les formules :

$$d\bar{x}=1 \; , \; dx^2=2x \; , \; dx^3=3x^2 \text{ etc.} \quad d\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ etc.}$$

(*Briefwechsel* t.1 p.226)

Newton indique la dérivée par un point au dessus de la fonction (Voir P8) ; Lagrange par un accent (Voir P9); Arbogast par $\mathrm{D}fx$.

Cauchy (*Œuvres* s.1 t.4 p.255) indique les dérivées par D_x , D_y ,... où l'indice désigne la variable par rapport à laquelle on dérive.

Jacobi a distingué la dérivée d'une fonction de plusieurs variables, par rapport à une variable, par des ∂ ; les dérivées sont alorrs dites " partielles ". Ces notations sont insuffisantes, car si l'on a une fonction de 3 variables $f \varepsilon \mathrm{qf}(\mathrm{q};\mathrm{q};\mathrm{q})$, et si $u \varepsilon \mathrm{qfq}$, $w \varepsilon \mathrm{qf}(\mathrm{q};\mathrm{q})$, il faudrait plusieurs espèces de d pour indiquer les 4 dérivées :

$$\mathrm{D}f(x,y,z)|x, \quad \mathrm{D}f(x,ux,z)|x, \quad \mathrm{D}f[x,y,w(x,y)]|x, \quad \mathrm{D}f[x,ux,w(x,ux)]|x.$$

✻ 2. $k \varepsilon \mathrm{Cls'q} . k \supset \delta k . f,u,v,\mathrm{D}u,\mathrm{D}v \,\varepsilon\, \mathrm{qF}k . a \varepsilon \mathrm{q} .\supset .$

·1 $\mathrm{D}(u+v) = \mathrm{D}u+\mathrm{D}v$

$[\mathrm{Hp} . x\varepsilon k .\supset. \mathrm{D}(u+v)x = \lim\{[(u+v)y-(u+v)x]/(y-x) \,|y, k, x\}$
$= \lim\{(uy+vy-ux-vx)/(y-x)$ »
$= \lim\{(uy-ux)/(y-x) + (vy-vx)/(y-x)$ »
$= \lim[(uy-ux)/(y-x) \,|y, k, x] + \lim[(vy-vx)/(y-x) \,|y, k, x]$
$= \mathrm{D}ux + \mathrm{D}vx \,]$

·2 $\mathrm{D}au = a\mathrm{D}u$

·3 $\mathrm{D}(u\times v) = u\times\mathrm{D}v+v\times\mathrm{D}u$

$[\mathrm{Hp} . x\varepsilon k .\supset. \mathrm{D}(u\times v)x = \lim[(u\times v)y-(u\times v)x]/(y-x) \,|y, k, x]$
$= \lim[(uy\times vy-ux\times vx)/(y-x)$ »
$= \lim\{[ux(vy-vx)+vx(uy-ux)+(uy-ux)(vy-vx)]/(y-x)$ »
$= \lim[ux\times(vy-vx)/(y-x)+vx\times(uy-ux)/(y-x) +$
$(uy-ux)/(y-x)\times(vy-vx)/(y-x)\times(y-x)$ »
$= ux\times\mathrm{D}vx + vx\times\mathrm{D}ux \,]$

·4 $f\text{'}k \supset \delta f\text{'}k . g, \mathrm{D}g \varepsilon \mathrm{qF}(f\text{'}k) .\supset. \mathrm{D}(gf)x = (\mathrm{D}g)fx \times \mathrm{D}fx$

$[\mathrm{Hp} .\supset. \mathrm{D}(gf)x = \lim[(gfy-gfx)/(y-x) \,|y, k, x]$
$= \lim[(gfy-gfx)/(fy-fx)\times(fy-fx)/(y-x)$ » $.\supset. \mathrm{Ths} \,]$

↾ ✱ 3·1 $x \varepsilon \mathrm{q} - \iota 0 \,.\supset.\, \mathrm{D}(/x|x, \mathrm{q}-\iota 0, x) = -/x^2$

[$\mathrm{D}(/x|x, \mathrm{q}-\iota 0, x) = \lim[(/y - /x)/(y-x)|y, \mathrm{q}-\iota 0, x]$
$= \lim[-/(yx)$ » » » $= -/x^2$]

·11 Hp P2 . $0 - \varepsilon\, v\text{‘}k \,.\supset.\, \mathrm{D}/v = -\mathrm{D}v/v^2$

·12 » » » $\mathrm{D}(u/v) = (v\mathrm{D}u - u\mathrm{D}v)/v^2$

·2 $m \varepsilon \mathrm{N}_1 \,.\, x \varepsilon \mathrm{q} \,.\supset.\, \mathrm{D}(x^m|x, \mathrm{q}, x) = m x^{m-1}$

[$\mathrm{D}(x^m|x, \mathrm{q}, x) = \lim[(y^m - x^m)/(y-x)|y, \mathrm{q}, x]$
$= \lim[\Sigma(y^{m-r}x^{r-1}|r, 1\cdots m)|y, \mathrm{q}, x) = m x^{m-1}$]

·21 Hp P2 . $m \varepsilon \mathrm{N}_1 \,.\, u \varepsilon \mathrm{qF}k \,.\supset.\, \mathrm{D}(u\upharpoonleft m) = m u \upharpoonleft (m-1) \times \mathrm{D}u$

·3 $m \varepsilon \mathrm{n} \,.\, x \varepsilon \mathrm{q}-\iota 0 \,.\supset.\, \mathrm{D}(x^m|x, \mathrm{q}-\iota 0, x) = m x^{m-1}$

[$m \varepsilon \mathrm{N}_0 \,.\, \mathrm{P}{\cdot}1 \,.\supset.\, \mathrm{P}$ (1)
$n \varepsilon \mathrm{N}_1 \,.\, m = -n \,.\supset.\, \mathrm{D}(x^{-n}|x, \mathrm{q}-\iota 0, x) = \mathrm{D}(/x^n|x, \mathrm{q}-\iota 0, x) =$
$-n x^{n-1}/x^{2n} = -n x^{-n-1} = m x^{m-1}$ (2)
(1) . (2) $.\supset.$ P]

·4 $m \varepsilon \mathrm{N}_1 \,.\, x \varepsilon \mathrm{Q} \,.\supset.\, \mathrm{D}(\sqrt[m]{x}|x, \mathrm{Q}, x) = /m\, \sqrt[m]{x^{m-1}}$

[$\mathrm{D}(x\upharpoonleft/m|x, \mathrm{Q}, x) = \lim[(y\upharpoonleft/m - x\upharpoonleft/m)/(y-x)|y, \mathrm{Q}, x]$
$= /\lim\{[(y\upharpoonleft/m)\upharpoonleft m - (x\upharpoonleft/m)\upharpoonleft m]/(y\upharpoonleft/m - x\upharpoonleft/m)$ » »
$= /[m(x\upharpoonleft/m)\upharpoonleft(m-1)]$]

·5 $m \varepsilon \mathrm{r} \,.\, x \varepsilon \mathrm{Q} \,.\supset.\, \mathrm{D}(x^m|x, \mathrm{Q}, x) = m x^{m-1}$

[P·1 . P·4 $.\supset.$ P]

{ LEIBNIZ, *Nova methodus pro maximis et minimis itemque tangentibus,... et singulare pro illis calculi genus.* Acta Erud. Lips. a.1684:

« *Additio et Subtractio*: si sit $z - y + w + x$ æqu. v, erit $\mathrm{d}\overline{z-y+w+x}$ seu $\mathrm{d}v$ æqu. $\mathrm{d}z - \mathrm{d}y + \mathrm{d}w + \mathrm{d}x$.

Multiplicatio: $\mathrm{d}\overline{xv}$ æqu. $x\mathrm{d}v + v\mathrm{d}x$.

Potentiæ: $\mathrm{d}x^a = a.x^{a-1}\,\mathrm{d}x$.

Radices: $\mathrm{d}\sqrt[b]{x^a} = \frac{a}{b}\mathrm{d}x \sqrt[b]{x^{a-b}}$

Suffecisset autem regula potentiae integrae tam ad fractas tam ad radices determinandas. » }

{ NEWTON, *Philosophiae naturalis principia mathematica,* a.1686 t.2 p.55:

« Lemma II. Momentum genitæ æquatur momentis laterum singulorum generatium in eorundem laterum indices dignitatum & coefficientia continue ductis.

Genitam voco quantitatem omnem, quæ ex lateribus vel terminis quibuscunque in arithmetica per multiplicationem, divisionem, & extractionem radicum.... Has quantitates, ut indeterminatas & instabiles, & quasi motu fluxuve perpetuo crescentes vel decrescentes, hic considero; & earum incrementa vel decrementa momentanea sub nomine momentorum intelligo: ita ut incrementa pro momentis addititiis seu affirmativis, ac decrementa

pro subductitiis seu negativis habeantur. Cave tamen intellexeris particulas finitas. Particulæ finitæ non sunt momenta, sed quantitates ipsæ ex momentis genitæ. Intelligenda sunt principia jamjam nascentia finitarum magnitudinum. Neque enim spectatur in hoc Lemmate magnitudo momentorum: sed prima nascentium proportio. Eodem recidit si loco momentorum usurpentur vel velocitates incrementorum ac decrementorum (quas etiam motus, mutationes & fluxiones quantitatum nominare licet) vel finitæ quævis quantitates velocitatibus hisce proportionales. Lateris autem cujusque generantis coefficiens est quantitas, quæ oritur applicando genitam ad hoc latus.

Igitur sensus lemmatis est, ut, si quantitatum quarumcunque perpetuo motu crescentium vel decrescentium A, B, C, &c. momenta, vel his proportionales mutationum velocitates dicantur a, b, c, &c. momentum vel mutatio geniti rectanguli A B fuerit a B + b A, & geniti contenti ABC momentum fuerit a B C + b A C + c A B.... Et generaliter, ut dignitatis cujuscunque $\mathrm{A}^{\frac{n}{m}}$ momentum fuerit $\frac{n}{m} a \mathrm{A}^{\frac{n-m}{m}}$. » }

* 4. $a, b \varepsilon \mathrm{q} \,.\, a < b \,.\, f \varepsilon \mathrm{qF} a^{-} b \;.\supset:$

·1 $x \varepsilon a^{-} b \,.\, fx = \max f{}^{\backprime} a^{-} b \,.\, \mathrm{D}fx \,\varepsilon \mathrm{q} \;.\supset.\; \mathrm{D}fx = 0$

[Hp . §lim P2·4 .⊃. $\mathrm{D}fx = \lim[(fy - fx) / (y - x) \,|\, y, a^{-} b \cap (x - \mathrm{Q}), x]$ (1)
Hp . $y \varepsilon a^{-} b \cap (x - \mathrm{Q})$.⊃. $fy - fx \leqq 0$
» » » .⊃. $(fy - fx) / (y - x) \geqq 0$ (2)
(1) . (2) .⊃. $\mathrm{D}fx \geqq 0$ (3)
Hp .⊃. $\mathrm{D}fx = \lim[(fy - fx) / (y - x) \,|\, y, a^{-} b \cap (x + \mathrm{Q}), x]$ (4)
$y \varepsilon a^{-} b \cap (x + \mathrm{Q})$.⊃. $(fy - fx) / (y - x) \leqq 0$ (5)
(4) . (5) .⊃. $\mathrm{D}fx \leqq 0$ (6)
(3) . (6) .⊃. P] Ex. Dem P·3

·11 (min | max)P·1

·2 $\mathrm{D}f \,\varepsilon\, \mathrm{qF} a^{-} b \;.\supset.\; f \varepsilon (\mathrm{qF} a^{-} b)\mathrm{cont}$

[Hp . $x \varepsilon a^{-} b$.⊃. $\lim[(fy - fx) \,|\, y, a^{-} b, x] =$
$\lim[(fy - fx) / (y - x) \times (y - x) \,|\, y, a^{-} b, x] = (\mathrm{D}fx) \times 0 = 0$]

·3 $\mathrm{D}f \,\varepsilon\, \mathrm{qF} a^{-} b \,.\, fa = fb = 0 \;.\supset.\; \exists\, a^{-} b \cap x \ni (\mathrm{D}fx = 0)$

{ Rolle a.1689 p.127 :

« Les racines de chaque cascade (dérivée) seront prises pour les hypotheses moyennes de la cascade suivante ». }

[Hp . P·2 .⊃. $f \varepsilon (\mathrm{qF} a^{-} b)\mathrm{cont}$ (1)
Hp . (1) . § cont P1·3 .⊃. $\exists\, \iota \max f{}^{\backprime} a^{-} b \,.\, \exists\, \iota \min f{}^{\backprime} a^{-} b$ (2)
Hp . $\exists\, \mathrm{Q} \cap f{}^{\backprime} a^{-} b$.⊃. $\max f{}^{\backprime} a^{-} b \,\varepsilon \mathrm{Q}$
» » » . $x \varepsilon a^{-} b \,.\, fx = \max f{}^{\backprime} a^{-} b$.⊃. $x \varepsilon a^{-} b$ (3)
» » » » » » » . (3) . P·1 .⊃. Ths (4)
Hp . $\exists\, (-\mathrm{Q}) \cap f{}^{\backprime} a^{-} b$.⊃. $\exists\, \mathrm{Q} \cap (-f){}^{\backprime} a^{-} b$. (1) .⊃. Ths (5)
Hp . $-\exists\, \mathrm{Q} \cap f{}^{\backprime} a^{-} b \,.\, -\exists\, (-\mathrm{Q}) \cap f{}^{\backprime} a^{-} b$.⊃. $f \varepsilon\, \iota 0 \,\mathrm{F} a^{-} b$.⊃. Ths (6)
(4) . (5) . (6) .⊃. P] Ex. Dem P·4·5

·4 $\text{D}f\,\varepsilon\,\text{qF}a\overline{\ }b\ .\supset.\ (fb-fa)/(b-a)\,\varepsilon\,\text{D}f\,'\,a\overline{\ }b$

} Cavalieri a.1635 l.vii p.15 (p.492 de l'éd. de 1653) :

« Si curva linea quaecunque data tota sit in eodem plano, cui occurrat recta in duobus punctis..... poterimus aliam rectam lineam prefatae aequidistantem ducere, quae tangat portionem curvae lineae inter duos prædictos occursus continuatam ». {

[$\text{Hp}\,.\,g=[fx-fa-(x-a)(fb-fa)/(b-a)]\,|x\ .\supset.$
$ga=gb=0\,.\ \text{D}g=\text{D}f-(fb-fa)/(b-a)\ .\ \text{P}{\cdot}3\ .\supset.$
$\exists\, a\overline{\ }b\cap x\ni[\text{D}fx-(fb-fa)/(b-a)=0]\ .\supset.\ \text{Ths}$] Ex. Dem P·7

·41 $f,\text{D}f\,\varepsilon\,\text{qF}(a+\Theta h)\ .\supset.\ f(a+h)-fa\,\varepsilon\,h\text{D}f(a+\Theta h)$ [= P·4]

·5 $f,\text{D}f,g,\text{D}g\,\varepsilon\,\text{qF}a\overline{\ }b\,.\,0 -\varepsilon\,\text{D}g\,'\,a\overline{\ }b\ .\supset.$
$(fb-fa)/(gb-ga)\,\varepsilon\,[(\text{D}f.x)/(\text{D}g.x)]\,|x\,'\,a\overline{\ }b$

[$\text{Hp}\,.\,h=[fx-fa-(gx-ga)(fb-fa)/(gb-ga)]\,|x\ .\supset.$
$ha=hb=0\ .\ \text{P}{\cdot}3\ .\supset.\ \text{P}$]

} Cauchy *Calc. diff.* a.1829 p.37 {

Les P·4,·5 s'appellent « théorèmes de la moyenne ».

·6 $\text{D}f\,\varepsilon\ \ \text{QF}a\overline{\ }b\ .\supset.\ f\,\varepsilon\,(\text{qF}a\overline{\ }b)\text{cres}$
» $-\text{Q}$ » » » » decr
» $(\iota 0)$ » » » » const [P·4 ⊃ P]

✱ 5·1 $a,b\varepsilon\text{q}\,.\,a -= b\,.\,f,g\,\varepsilon\,\text{qF}a\overline{\ }b\,.\,fa=ga=0\,.\,\text{D}fa,\text{D}ga\,\varepsilon\text{q}$
$.\,\text{D}ga -= 0\ .\supset.\ \lim[f/g,\ a\overline{\ }b\cap x\ni(gx -= 0),\ a]=(\text{D}fa)/(\text{D}ga)$

[$\text{Hp}\ .\supset.\ \lim(fx/gx)|x=\lim[(fx-fa)/(gx-ga)]\,|x$
$=\lim\{[(fx-fa)/(x-a)]/[(gx-ga)/(x-a)]\}\,|x$
$=(\text{D}fa)/(\text{D}ga)$] Ex. Dem P7·1

} De l'Hospital, *Analyse des infiniment petits* a.1696 p.145 :

« si l'on prend la différence du numérateur, et qu'on la divise par la différence du dénominateur, après avoir fait $x=a$, l'on aura la valeur cherchée ». {

·2 $a,b\varepsilon\text{q}\,.\,a -= b\,.\,f,g\,\varepsilon\,\text{qF}a\overline{\ }b\,.\,fa=ga=0\,.\,\text{D}f,\text{D}g\,\varepsilon\,\text{qF}a\overline{\ }b\,.$
$0 -\varepsilon\,\text{D}g\,'\,a\overline{\ }b\ .\supset.\ \text{Lm}(f/g,\ a\overline{\ }b,\ a)\supset\text{Lm}(\text{D}f/\text{D}g,\ a\overline{\ }b,a)$

[$\text{Hp}\,.\,\text{P}4{\cdot}3\ .\supset.\ 0 -\varepsilon\,g\,'\,a\overline{\ }b\ .\supset.\ f/g\,\varepsilon\,\text{qF}a\overline{\ }b$ (1)
$\text{Hp}\,.\,x\varepsilon\,a\overline{\ }b\,.\,y\varepsilon\,a\overline{\ }x\,.\,\text{P}4{\cdot}5\ .\supset.\ fy/gy\,\varepsilon\,(\text{D}f/\text{D}g)\,'(a\overline{\ }x)$ (2)
» » . (2) $.\supset.$ $(f/g)\,'(a\overline{\ }x)\supset(\text{D}f/\text{D}g)\,'(a\overline{\ }x)$ (3)
» » . (3).§λ 1·31 $.\supset.\ \Lambda$ » $\supset\Lambda$ » (4)
» » . $y\varepsilon\,\text{Lm}(f/g,\ a\overline{\ }b,\ a)$. Df Lm $.\supset.\ y\varepsilon\,\Lambda[(f/g)\,'(a\overline{\ }x)]$ (5)
» » » » .(4).(5) $.\supset.\ y\varepsilon\,\Lambda[(\text{D}f/\text{D}g)\,'(a\overline{\ }x)]$ (6)
$\text{Hp}\,.\,y\varepsilon\,\text{Lm}(f/g,\ a\overline{\ }b,\ a)$.(6) $.\supset:\ x\varepsilon\,a\overline{\ }b\ .\supset_x.\ y\varepsilon\,\Lambda[(\text{D}f/\text{D}g)\,'(a\overline{\ }x)]$ (7)
» » » . (7) . Df Lm $.\supset.\ y\varepsilon\,\text{Lm}(\text{D}f/\text{D}g,\ a\overline{\ }b,\ a)$ (8)
(8) ⊃ P]

·21 $a,b\varepsilon q . a -= b . f,g\varepsilon qFa\bar{}b . fa = ga = 0 . Df, Dg \varepsilon qFa\bar{}b .$
$0 -\varepsilon Dg`a\bar{}b . \lim(Df / Dg, a\bar{}b, a) \varepsilon q \cup \iota\infty \cup \iota(-\infty) .\supset.$
$\lim(f/g, a\bar{}b, a) = \lim(Df / Dg, a\bar{}b, a)$
[P·2 $\supset$ P] Ex. Dem P7·1

·3 $a\varepsilon q . f,g,Df,Dg \varepsilon qF(a+Q) . \lim(f, a+Q, \infty) = \lim(g, a+Q, \infty)$
$= 0 . 0 -\varepsilon Dg`(a+Q) . \lim[(Df x / Dg x) | x, a+Q, \infty] \varepsilon q \cup \iota\infty \cup$
$\iota(-\infty) .\supset. \lim(f/g, a+Q, \infty) = \lim(Df/Dg, a+Q, \infty)$

[$\lim(f/g, a+Q, \infty) = \lim[f(a+/x) / g(a+/x)] | x, Q, 0)$. P·21 $.\supset.$ P]

·4 $a\varepsilon q . f, Df \varepsilon qF(a+Q) . \lim(Df, a+Q, \infty) \varepsilon q \cup \iota\infty \cup \iota(-\infty)$
$.\supset. \lim[(fx)/x | x, a+Q, \infty] = \lim(Df, a+Q, \infty)$

·5 $a\varepsilon q . f,g,Df,Dg \varepsilon qF(a+Q) . \lim(g, a+Q, \infty) = \infty . 0 -\varepsilon Dg`$
$(a+Q) . \lim(Df/Dg, a+Q, \infty) \varepsilon q .\supset.$
$\lim(f/g, a+Q, \infty) = \lim(Df/Dg, a+Q, \infty)$

✻ 6. $k\varepsilon Cls`q . k \supset \delta k . m\varepsilon N_1 . u,v,D^m u, D^m v \varepsilon qFk . a\varepsilon q .\supset.$
·1 $D^m(u+v) = D^m u + D^m v$ ·2 $D^m au = aD^m u$

·3 $D^m(u\times v) = \Sigma[C(m,r)(D^{m-r}u)\times(D^r v) | r, 0\cdots m]$
{ Leibniz *MathS.* t.5 p.380 }

·4 $f\varepsilon q f k . x\varepsilon k .\supset. D^m(f,k,x) = D^m(f,k) x$ Df

Si u est une fonction définie F, a signification $D^m u$, par §+ 10·9. Si f est une opération f, la P·4 simplifie un peu les formules.

·5 $n\varepsilon m+N_0 . x\varepsilon q .\supset. D^m(x^n | x, q, x) = \Pi[n - 0\cdots(m-1)]\times x^{n-m}$
$n\varepsilon q . x\varepsilon Q$ » Q » » »
$n\varepsilon n . x\varepsilon q - \iota 0$ » $q - \iota 0$ » » »

·6 $x\varepsilon q .\supset. D^m[x^m(1-x)^m | x, q, x] =$
$m!\Sigma\{(-1)^r[C(m,r)]^2 x^r(1-x)^{m-r} | r, 0\cdots m\}$

✻ 7·1 $a,b\varepsilon q . a -= b . f,g\varepsilon qFa\bar{}b . m\varepsilon N_1 . fa = Dfa = D^2fa =$
$\ldots = D^m fa = 0 . D^{m+1}fa \varepsilon q . ga = Dga = D^2ga = \ldots = D^m ga$
$= 0 . D^{m+1}ga \varepsilon q - \iota 0 .\supset. \lim(f/g, a\bar{}b, a) = (D^{m+1}fa)/(D^{m+1}ga)$

[Hp . P5·2·1 $.\supset. \lim(f/g, a\bar{}b, a) = \lim(Df/Dg, a\bar{}b, a)$
$= \lim(D^2f/D^2g, \ \ ) = \ldots$
$= \lim(D^m f/D^m g, \ \ ) = D^{m+1}fa/D^{m+1}ga$]

✻ 8. $a,b \varepsilon \mathrm{q} \,.\, a -= b \,.\, x \varepsilon a^-b \,.\, m \varepsilon \mathrm{N}_1 \,.\, f, \mathrm{D}f, \mathrm{D}^2 f, \ldots \mathrm{D}^{m-1} f \,\varepsilon\, \mathrm{qF}\, a^-b$
$. \mathrm{D}^m fx \,\varepsilon \mathrm{q} \;.\supset.\; \lim[\{f(x+h) - \Sigma[h^r/r!(\mathrm{D}^r fx) \,|r, 0\cdots(m-1)]\}/$
$h^m \,|h, a^-b-x, 0] = (\mathrm{D}^m fx)/m!$

[($\{f(x+h) - \Sigma[h^r/r!\, \mathrm{D}^r fx \,|r, 0\cdots(m-1)]\} \,|h,\; h^m|h$) |
(f , g) P7 .⊃. P]

} Joh. Bernoulli a.1694 t.1 p.126:

« habetur hæc series generalissima :

$$Integr.\, ndz = + nz - \frac{zzdn}{1.2.dz} + \frac{z^3 ddn}{1.2.3.dz^2} - \frac{z^4 dddn}{1.2.3.4.dz^3} \&c. \text{ »} \;\{$$

} Taylor a.1715 p.21 :

« Sint z et x quantitates duae variabiles, quarum z uniformiter augetur per data incrementa $\dot z$, et sit $n\dot z = v$ . . . . .

p.23 : . . . quo tempore z uniformiter fluendo fit $z+v$, fiet x,

$$x + \dot x \frac{v}{1\dot z} + \ddot x \frac{v^2}{1.2\dot z^2} + \dddot x \frac{v^3}{1.2.3\dot z^3} + \&c. \text{ »} \qquad \{$$

} MacLaurin a.1742 p.610 :

« Suppose that y is any quantity that can be expressed by a series of this form $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 +$ &c. where A, B, C represent invariable coefficients . . . When z wanishes, let E be the value of y, and let $\dot E$, $\ddot E$, $\dddot E$, &c. be then the respective values of $\dot y$, $\ddot y$, $\dddot y$, &c. z being supposed to flow uniformly. Then

$$y = E + \frac{\dot E z}{\dot z} + \frac{\ddot E z^2}{1 \times 2 \dot z^2} + \frac{\dddot E z^3}{1 \times 2 \times 3\, \dot z^3} + \&c.$$

p.611 : This theorem was given by Dr. Taylor.
p.612 : which theorem is not materially different from Mr. Bernouilli's. » {

} Arbogast a.1800 :

$$F(a+x) = Fa + \frac{DFa}{1} x + \frac{D^2Fa}{1.2} x^2 + \frac{D^3Fa}{1.2.3} x^3 + \text{etc.} \qquad \{$$

Note.

La P8 s'appelle généralement « formule de Taylor », et pour $x = 0$, « formule de Maclaurin », bien que dejà énoncée par Joh. Bernoulli.

La signification du « etc » a été douteuse. Le second membre n'est pas la somme d'une série ; car la série peut être divergente ou avoir une somme différente du premier membre.

Nous avons donné cette interprétation de la formule dans les notes à « Genocchi, *Calcolo differenziale* a.1884 p.XIX ; trad. allemande p.321 », Mathesis a.1889 p.110, TorinoA. a.1891.

On peut remarquer dans les citations le développement du symbolisme.

Ex. de la P8 : §planOscul 2·1.

Continuation : P9 §S 21·1 §q$_n$ 33·2

✱ 9. $a,h \varepsilon \mathrm{q} \,.\, n,p \varepsilon \mathrm{N}_1 \,.\, f, \mathrm{D}^n f \,\varepsilon\, \mathrm{qF}(a+\Theta h) \;.\supset.$

·1 $f(a+h) - \Sigma[(h^r/r!\, \mathrm{D}^r fa) | r, 0 \cdots (n-1)] \;\varepsilon\; h^n/n!\, \mathrm{D}^n f`(a+\theta h)$

·2 » » $\varepsilon\; h^n/(n-1)!\, [(1-t)^{n-1} \mathrm{D}^n f(a+th)] \,|\, t`\theta$

·3 » » $\varepsilon\; h^n/(n-1)!\, [(1-t)^{n-p}/p\, \mathrm{D}^n f(a+th)] \,|\, t`\theta$

{ ·1 LAGRANGE a.1798, *Th. des Fonctions analytiques* p.52 :

« D'où résulte enfin ce théorème nouveau et remarquable par sa simplicité et généralité, qu'en désignant par u une quantité inconnue, mais renfermée entre les limites 0 et x, on peut développer successivement toute fonction de x et d'autres quantités quelconques suivant les puissances de x, de cette manière :

$$\mathrm{f}x = \mathrm{f}. + x\mathrm{f}'u,$$

$$= \mathrm{f}. + x\mathrm{f}'. + \frac{x^2}{2}\mathrm{f}''u,$$

$$= \mathrm{f}. + x\mathrm{f}'. + \frac{x^2}{2}\mathrm{f}''. + \frac{x^3}{2.3}\mathrm{f}'''u,$$

etc. ,

les quantités f., f'., f''., etc. étant les valeurs de la fonction fx et de ses dérivées f'x, f''x, etc., lorsqu'on y fait $x=0$ ». }

{ ·2 CAUCHY, *Exercices* t.1 a.1826 p.26 }

{ ·3 SCHLÖMILCH a.1847 p.177 }

Dem P·1 [$\mathrm{Hp} \,.\, k = \{f(a+h) - \Sigma[h^r/r!\, \mathrm{D}^r fa | r, 0 \cdots (n-1)]\}/h^n \,.$

$g = \{fx - \Sigma[(x-a)^r/r!\mathrm{D}^r fa \,|\, r, 0 \cdots (n-1)] - k(x-a)^n\} | x \;.\supset.$

$ga = \mathrm{D}ga = \mathrm{D}^2 ga = \ldots = \mathrm{D}^{n-1} ga = 0 \,.\, g(a+h) = 0 \;.\supset.$

$\exists\, (a+\theta h) \frown u \ni (\mathrm{D}^n gu = 0) \;.\supset.$

$\exists\, (a+\theta h) \frown u \ni [\mathrm{D}^n fu - n!k] = 0 \;.\supset.$

$k \varepsilon\, \mathrm{D}^n f`(a+\theta h)/n!$]

[P·3 . $p=1$ $.\supset.$ P·2] [P·3 . $p=n$ $.\supset.$ P·1]

✱ 10·1 $a,b \varepsilon \mathrm{q} \,.\, a -\!\!= b \,.\, f \varepsilon\, \mathrm{qF}a^-b \,.\, m \varepsilon \mathrm{N}_1 \,.\, x \varepsilon\, (a^-b \,\mathrm{f}\, 1 \cdots m)\mathrm{sim} \,.$

$g = \Sigma\{fx_r \Pi[(z-x_s)/(x_r-x_s) \,|\, s, (1 \cdots m) - \iota r] \,|\, r, 1 \cdots m\} \,|\, z \,.$

$\mathrm{D}^m f \,\varepsilon\, \mathrm{qF}\, a^-b \,.\, y \varepsilon\, a^-b \;.\supset.$

$fy - gy \;\varepsilon\; \Pi[(y-x_r) | r, 1 \cdots m]\, \mathrm{D}^m f`(a^-b)/m!$

[$\mathrm{Hp} \,.\, k = (fy-gy)/\Pi[(y-x_r) | r, 1 \cdots m] \,.\, h = \{fz - gz - k\, \Pi[(z-x_r) | r, 1 \cdots m]\} | z$ $.\supset.$ $hx_1 = 0 \,.\, hx_2 = 0 \,.\, \ldots \,.\, hx_m = 0$ $.\supset.$ $\mathrm{Num}[a^-b \frown z \ni (hz = 0)] \geqq m$ $.\supset.$ $\mathrm{Num}[a^-b \frown z \ni (\mathrm{D}hz = 0)] \geqq m-1$ $.\supset. \ldots .\supset.$ $\mathrm{Num}[a^-b \frown z \ni (\mathrm{D}^m hz = 0)] \geqq 1$ $.\supset.$ $\exists\, a^-b \frown z \ni (\mathrm{D}^m hz = 0)$ $.\supset.$ $\exists\, a^-b \frown z \ni (\mathrm{D}^m fz - m!k = 0)$ $.\supset.$ Ths]

{ H. A. SCHWARZ, TorinoA. a.1882 }

{ STIELTJES, a.1882 Amsterdam Ak. s.2 t.17 p.239-254 }

La fonction g considérée dans la P·1 est la fonction entière de degré $n-1$, qui pour les valeurs $x_1 x_2 \ldots x_n$ coïncide avec la f, sous la forme donnée par Lagrange (Œuvres t.7 p.285); la même fonction a été donnée sous une autre forme par Newton a.1686 t.3 prop. XL lemma 5.

·2 $a,b\varepsilon \mathrm{q} \,.\, a -\!\!= b \,.\, f, \mathrm{D}^2 f \,\varepsilon\, \mathrm{qF} a \bar{\ } b \,.\, m,n \varepsilon \mathrm{Q} \;.\supset.$
$f[(ma+nb)/(m+n)] - (mfa+nfb)/(m+n) \;\varepsilon$
$-(b-a)^2 mn(m+n)^{-2}/2\, \mathrm{D}^2 f`(a \bar{\ } b)$ [P·1 $m = 2 \,.\supset.$ P]

·3 Hp P·2 . $\mathrm{D}^2 f \,\varepsilon\, \mathrm{QF}\, a \bar{\ } b \,.\, r \varepsilon \mathrm{N}_1 + 1 \,.\, z \varepsilon\, (a \bar{\ } b\, \mathrm{F}\, 1 \cdots r)$cres .
$m \varepsilon\, \mathrm{QF}\, 1 \cdots r \;.\supset.\; f[(\Sigma mz)/(\Sigma m)] < (\Sigma mfz)/(\Sigma m)$

lim Σ ❊ 11.

·1 $a,h \varepsilon \mathrm{q} \,.\, f \varepsilon\, \mathrm{qF}(a+\Theta h) \,.\, \mathrm{l}'\,(\mathrm{mod}\, \mathrm{D}^n f x) | (n,x) `(\mathrm{N}_1 ; a+\Theta h)\; \varepsilon \mathrm{Q}$.
$\supset.\; f(a+h) = \Sigma\{ h^r / r!\, \mathrm{D}^r fa \,|\, r, \mathrm{N}_0 \}$

·2 $k \varepsilon\, \mathrm{Cls}'\mathrm{q} \,.\, k \supset \delta k \,.\, f \varepsilon\, \mathrm{q\,f}(k ; \mathrm{N}_0) \;:\; n \varepsilon \mathrm{N}_0 \,.\, x \varepsilon k \;.\supset_{k,x}.\; \mathrm{D}[f(z,n) | z$
$, k , x] \,\varepsilon \mathrm{q} \;:\; \Sigma\{[\mathrm{l}'\, \mathrm{mod}\, \mathrm{D}[f(z,n)|z, k, z] \,|\, z `k] | n, \mathrm{N}_0\} \;\varepsilon \mathrm{Q} \;:\; x \varepsilon k \;:\supset.$
$\mathrm{D}\{\Sigma[f(z,n)|n, \mathrm{N}_0] | z, k, x\} = \Sigma\{\mathrm{D}[f(z,n)|z, k, x] | n, \mathrm{N}_0\}$
{ Comm(D, Σ) }

Continuation : §S 20 §e 4 §log 4 §q_n 31 §Subst 11 §q′ 11.

§75 $\int$ S = (intégrale)

$+ \ N_1 \ - \ \times \ < \ \cdots \ \Sigma \ l' \ l_, \ q \ \mathrm{Med} \ \mathrm{cres}$

$* \ 1. \quad a,b \varepsilon q \,.\, a<b \,.\, f \varepsilon q f a{\urcorner}b \,.\, l' f`a{\urcorner}b, l_, f`a{\urcorner}b \,\varepsilon q \,.\supset.$

$\cdot 0 \quad S(f, a{\urcorner}b) = \iota\, y \ni \{ n \varepsilon N_1 \,.\, x \varepsilon (a{\urcorner}b \mathrm{f} 0 \cdots n)\mathrm{cres} \,.\, x_0 = a \,.\, x_n = b \,.$
$\supset_{n,x} .\ y \varepsilon \Sigma[(x_{r+1} - x_r)\, \mathrm{Med}\, f`(x_r{\urcorner}x_{r+1}) \mid r, 0 \cdots (n-1)] \}$ Df

$\cdot 01 \ S(f, a{\urcorner}b) = \iota\, q \frown y \ni \{ n \varepsilon N_1 \,.\, x \varepsilon (a{\urcorner}b \mathrm{f} 0 \cdots n)\mathrm{cres} \,.\, x_0 = a \,.$
$x_n = b \,.\supset_{n,x} .\ \Sigma[(x_{r+1} - x_r) l' f(x_r{\urcorner}x_{r+1}) \mid r, 0 \cdots (n-1)] \geqq y \geqq$
$\Sigma[(x_{r+1} - x_r) l_, f(x_r{\urcorner}x_{r+1}) \mid r, 0 \cdots (n-1)] \}$ Dfp

$\cdot 1 \quad \int_a^b fx\, dx = S(f, a{\urcorner}b) \,.\, \int_b^a fx\, dx = -\int_a^b fx\, dx \,.\, \int_a^a fx\, dx = 0$ Df

$2 \quad S'(f, a{\urcorner}b) = l_, y \ni \exists (n;x) \ni \{ n \varepsilon N_1 \,.\, x \varepsilon (a{\urcorner}b \mathrm{f} 0 \cdots n)\mathrm{cres} \,.\, x_0 = a \,.$
$x_n = b \,.\, y = \Sigma[(x_{r+1} - x_r)\, l' f`(x_r{\urcorner}x_{r+1}) \mid r, 0 \cdots (n-1)] \}$ Df

$3 \quad S_,(f, a{\urcorner}b) = l'$ ————————————————————
———————————— $l_,$ ———————————— Df

P1·0 « Soient a, b des quantités, $a<b$, et f une fonction réelle définie dans toute l'intervalle de a à b, et limitée supérieurement et inférieurement. Nous indiquons par S $(f, a{\urcorner}b)$, qu'on lira « l'intégrale de f, étendue à l'intervalle de a à b », la quantité y telle que, quelle que soit la division de l'intervalle de a à b, formée par une suite croissante $x_0\, x_1 \ldots x_n$, où x_0 et x_n ont respectivement les valeurs a et b, la quantité y soit toujours une des valeurs de la somme des produits de l'amplitude des intervalles partiels, par des valeurs moyennes de la fonction dans ces intervalles ».

Cavalieri a considéré l'intégrale comme la somme de toutes (omnes) les valeurs de la fonction (voir P5·1, §logP·3).

Leibniz (Acta eruditorum a.1686) l'a indiqué par $\int y\, dx$; la lettre $\int$, initiale de « somme », a été dans la suite déformée et agrandie.

Le nom " intégrale " a été introduit par Jac. Bernoulli, AErud. a.1690.

Euler a adopté la notation (Calc. Int. a.1768) $\int fx\, dx \left[\begin{array}{l} \text{a } x=a \\ \text{ad } x=b \end{array}\right]$,
simplifié sous la forme ·1 par Fourier (a.1822 p.252). La notation S $(f, a{\urcorner}b)$, dont nous ferons usage en général, a l'avantage de s'appliquer dans les cas où l'intégrale n'est pas étendue à un intervalle, mais bien à une classe quelconque (P10·4). Voir Σ.

La P·01 exprime la même Df, où l'on a remplacé Med par sa valeur.

S'$(f, a{\urcorner}b)$, qu'on lira « l'intégrale par excès », s'obtient en multipliant l'amplitude des intervalles par la limite supérieure des valeurs de la fonction dans les mêmes intervalles, et en prenant la limite inférieure de ces sommes.

En échangeant les limites supérieures avec les inférieures, on obtient la définition de $\mathrm{S}_{,}(f, a \neg b)$, qu'on nomme « intégrale par défaut ».

Darboux (voir P2·31) a considéré ces intégrales comme limites (lim) des sommes contenues dans le P·2·3; sur le remplacement de l'idée de lim par celle de limite supérieure (l'), voir mes additions à Genocchi, *Diff. R.* a.1899 p.366.

✻ 2. Hp P1 $.\supset.$

·1 $\mathrm{S}'(f, a\neg b), \mathrm{S}_{,}(f, a\neg b)\ \varepsilon\mathrm{q}$

·2 $(b-a)\mathrm{l}'f\text{‘}a\neg b \geqq \mathrm{S}'(f, a\neg b) \geqq \mathrm{S}_{,}(f, a\neg b) \geqq (b-a)\mathrm{l}_{,}f\text{‘}a\neg b$

[$n\varepsilon\mathrm{N}_1 \,.\, x\varepsilon(a\neg b\ \mathrm{f}\ 0\cdots n)\mathrm{cres} \,.\, x_0=a \,.\, x_n=b \,.\, r\varepsilon\, 0\cdots(n-1) \,.\, \S\mathrm{q\,P18{\cdot}5} \,.\supset.$

$\mathrm{l}'f\text{‘}(a\neg b) \geqq \mathrm{l}'f\text{‘}(x_r\neg x_{r+1}) \geqq \mathrm{l}_{,}f\text{‘}(a\neg b)$ (1)

$n\varepsilon\mathrm{N}_1 \,.\, x\varepsilon(a\neg b\ \mathrm{f}\ 0\cdots n)\mathrm{cres} \,.\, x_0=a \,.\, x_n=b \,.\, (1) \,.\supset.\ (b-a)\mathrm{l}'f\text{‘}(a\neg b) \geqq$

$\Sigma[(x_{r+1}-x_r)\mathrm{l}'f\text{‘}(x_r\neg x_{r+1})|r, 0\cdots(n-1)] \geqq (b-a)\mathrm{l}_{,}f\text{‘}a\neg b$ (2)

(2) . §q P18·12 $.\supset.$

$\mathrm{S}'(f, a\neg b)\ \varepsilon\mathrm{q} \,.\, (b-a)\mathrm{l}'f\text{‘}a\neg b \geqq \mathrm{S}'(f, a\neg b) \geqq (b-a)\mathrm{l}_{,}f\text{‘}a\neg b$ (3)

$(\mathrm{S}_{,} \mid \mathrm{S}')\,\mathrm{P}(3) \,.\supset.$

$\mathrm{S}_{,}$ » » » » » $\mathrm{S}_{,}$ » » » (4)

$m,n\varepsilon\mathrm{N}_1 \,.\, x\varepsilon(a\neg b\ \mathrm{f}\ 0\cdots m)\mathrm{cres} \,.\, x_0=a \,.\, x_m=b \,.\, y\varepsilon(a\neg b\ \mathrm{f}\ 0\cdots n)\mathrm{cres} \,.$

$y_0=a \,.\, y_n=b \,.\, x\text{‘}0\cdots m \supset y\text{‘}0\cdots n \,.\supset.$

$\Sigma[(x_{r+1}-x_r)\mathrm{l}'f\text{‘}(x_r\neg x_{r+1})|r, 0\cdots m-1] \geqq \Sigma[(y_{s+1}-y_s)\mathrm{l}'f\text{‘}(y_s\neg y_{s+1})|s, 0\cdots n-1]$

$.\ \Sigma$ » $\mathrm{l}_{,}$ » » » » $\leqq$ » $\mathrm{l}_{,}$ » » » (5)

$m,n\varepsilon\mathrm{N}_1 \,.\, x\varepsilon(a\neg b\ \mathrm{f}\ 0\cdots m)\mathrm{cres} \,.\, x_0=a \,.\, x_m=b \,.\, y\varepsilon(a\neg b\ \mathrm{f}\ 0\cdots n) \,.\, y_0=a \,.$

$y_n=b \,.\, p=\mathrm{Num}[x\text{‘}(0\cdots m)\cup y\text{‘}(0\cdots n)] \,.\, z=\iota[(x\text{‘}0\cdots m\cup y\text{‘}0\cdots n)\mathrm{f}(0\cdots p)]\mathrm{cres}$

$.\ (5) \,.\supset.\ \Sigma[(x_{r+1}-x_r)\mathrm{l}'f\text{‘}(x_r\neg x_{r+1})|r, 0\cdots(m-1)] \geqq$

$\Sigma[(z$ » z » z » z » » » p » $\geqq$

» » $\mathrm{l}_{,}$ » » » » » $\geqq$

$\Sigma[(y$ » y » y » y » n »)] (6)

(3) . (4) . (6) $.\supset.$ P·1 . P·2]

·3 $\mathrm{S}(f, a\neg b)\ \varepsilon\mathrm{q} \,.=.\ \mathrm{S}'(f, a\neg b) = \mathrm{S}_{,}(f, a\neg b)$

·31 ——————— $.\supset.$ ————————————— $= \mathrm{S}(f, a\neg b)$

{ Darboux a.1875 p.71 }

·4 $c\varepsilon\, a\neg b \,.\supset.\ \mathrm{S}'(f, a\neg b) = \mathrm{S}'(f, a\neg c) + \mathrm{S}'(f, c\neg b)$

·41 ——————— $\mathrm{S}_{,}$——————— $\mathrm{S}_{,}$———————$\mathrm{S}_{,}$———————

·42 ——— $.\supset:\ \mathrm{S}(f, a\neg b)\ \varepsilon\mathrm{q} \,.=.\ \mathrm{S}(f, a\neg c), \mathrm{S}(f, c\neg b)\ \varepsilon\mathrm{q}$

·43 $\mathrm{S}(f, a\neg b)\ \varepsilon\mathrm{q} \,.\supset.\ \mathrm{S}(f, a\neg b) = \mathrm{S}(f, a\neg c) + \mathrm{S}(f, c\neg b)$

·5 $\mathrm{S}'(f, a\neg b) = (b-a)\,\mathrm{S}'\{f[a+(b-a)t]\,|t, \Theta\}$ ·51 $(\mathrm{S}_{,} \mid \mathrm{S}')\mathrm{P{\cdot}5}$

La P·5 transforme toute intégrale dans une autre où l'intervalle d'intégration est Θ. Nous nous limiterons donc à ces cas pour simplifier les formules suivantes.

* 3. $f,g \,\varepsilon\, \mathrm{qf}\Theta \,.\, \mathrm{l}'f`\Theta, \mathrm{l}_{\prime}f`\Theta, \mathrm{l}'g`\Theta, \mathrm{l}_{\prime}g`\Theta \,\varepsilon\, \mathrm{q} \;.\!\supset.$

·0 $\mathrm{S}'(f,\Theta), \mathrm{S}_{\prime}(f,\Theta) \,\varepsilon\, \mathrm{Med}\, f`\Theta$

·01 $\mathrm{S}(f,\Theta) \,\varepsilon\, \mathrm{q} \;.\!\supset.\; \mathrm{S}(f,\Theta) \,\varepsilon\, \mathrm{Med} f`\Theta$

·1 $\mathrm{S}'(f+g, \Theta) \leqq \mathrm{S}'(f,\Theta)+\mathrm{S}'(g,\Theta)$ ·11 $(\mathrm{S}_{\prime}, \geqq)(\mathrm{S}', \leqq)$P·1

·12 $\mathrm{S}(f,\Theta), \mathrm{S}(g,\Theta) \,\varepsilon\, \mathrm{q} \;.\!\supset.\; \mathrm{S}(f+g, \Theta) = \mathrm{S}(f,\Theta)+\mathrm{S}(g,\Theta)$

·2 $\mathrm{S}'(f, \Theta) = \mathrm{S}'[f(1-x)|x, \Theta]$ ·21 $(\mathrm{S}_{\prime}|\mathrm{S}')$P·2

·22 $\mathrm{S}(f,\Theta) \,\varepsilon\, \mathrm{q} \;.\!\supset.\; \mathrm{S}(f, \Theta) = \mathrm{S}[f(1-x)|x, \Theta]$

·3 $\mathrm{S}'(-f, \Theta) = -\mathrm{S}_{\prime}(f,\Theta)$ ·31 $(\mathrm{S}_{\prime} \,|\, \mathrm{S}')$P·3

·32 $\mathrm{S}(f,\Theta) \,\varepsilon\, \mathrm{q} \;.\!\supset.\; \mathrm{S}(-f, \Theta) = -\mathrm{S}(f,\Theta)$

·4 $m \varepsilon \mathrm{Q} \;.\!\supset.\; \mathrm{S}'(mf, \Theta) = m\mathrm{S}'(f,\Theta)$ ·41 ——————·4

·42 $\mathrm{S}(f,\Theta) \,\varepsilon\, \mathrm{q} \,.\, m \varepsilon \mathrm{q} \;.\!\supset.\; \mathrm{S}(mf,\Theta) = m\mathrm{S}(f,\Theta)$

·5 $x \varepsilon \Theta \;.\!\supset_x.\; fx > gx \;:\!\supset.\; \mathrm{S}'(f,\Theta) \geqq \mathrm{S}'(g,\Theta)$ ·51 ——————·5

·6 $g \varepsilon \mathrm{Qf}\Theta \;.\!\supset.$

$$(\mathrm{l}'f`\Theta)\times\mathrm{S}'(g,\Theta) \geqq \mathrm{S}'(f\times g, \Theta) \geqq \mathrm{S}_{\prime}(f\times g, \Theta) \geqq (\mathrm{l}_{\prime}f`\Theta)\times\mathrm{S}_{\prime}(g,\Theta)$$

P·6 = " premier théorème de la moyenne ". Il est à peu prés évident ; les conditions restrictives ont été précisées par Dirichlet a.1837 t.1 p.138; voir aussi MA. a.1874 t.7 p.605, JdM. a.1874 s.2 t.3 p.293,...

·7 $g \varepsilon (\mathrm{qf}\Theta)\mathrm{cres} \;.\!\supset.$

$\exists\, \Theta \frown c \ni [\, \mathrm{S}'(f\times g, \Theta) = (g0)\mathrm{S}'(f, \Theta c)+(g1)\mathrm{S}'(f, 1-\Theta c)\,]$

·71 $(\mathrm{S}_{\prime} \,|\, \mathrm{S}')$P·7 } Bonnet JdM. a.1849 p.249 {

} Weierstrass (voir du Bois-Reymond JfM. a.1868 t.69 p.82) {

P·7·71 = " second théorème de la moyenne ". Il est ici simplifié.

* 4.

·1 $f\varepsilon (\mathrm{qf}\Theta)\mathrm{cres}_0 \;.\!\supset.\; \mathrm{S}(f,\Theta) = \mathrm{l}'\{\Sigma[f(r/n)\,|r, 0\cdots(n-1)]\}\,|n`\mathrm{N}_1$

$= \mathrm{l}_{\prime}$ » $1\cdots n\,]\}\,|n`\mathrm{N}_1$

·2 » $\mathrm{decr}_0 \;.\!\supset.\; \mathrm{S}(f,\Theta) = \mathrm{l}'$ » » »

$= \mathrm{l}_{\prime}$ » $0\cdots(n-1)]\}\,|n`\mathrm{N}_1$

·3 Hp·1 $\cup$ Hp·2 $\;.\!\supset.\; \mathrm{S}(f,\Theta) \,\varepsilon\, \mathrm{q}$

↾ * 5·1 $m\varepsilon\mathrm{N}_0 \;.\!\supset.\; \mathrm{S}(x^m|x, \Theta) = /(m+1)$

} B. Cavalieri a.1639 p.524: « se in un parallelogrammo, descritto il diametro, intenderemo tirate parallele ad un lato di esso quante se ne possono tirare, indefinitamente di qua e di là prolungate, la parte di esse che resta nel parallelogrammo, cioè (per parlare nella lingua usata in essa geometria) tutte le linee del parallelogrammo saranno doppie di tutte le linee comprese in uno dei fatti triangoli. Tutti i quadrati del parallelogrammo saranno tripli di tutti i quadrati dello stesso triangolo. Tutti i cubi saranno quadrupli di tutti i cubi. Tutti i biquadrati saranno quintupli di tutti i biquadrati (intendo sempre quelli del parallelogrammo di

quelli del detto triangolo. Donde argomento probabilmente che tutti li quadricubi saranno sestupli di tutti i quadricubi. Tutti i cubicubi saranno settupli di tutti i cubicubi, e così in infinito secondo i numeri continuamente susseguenti. » }

·2 $m, n \varepsilon N_1 . \supset . S(x^{m/n}|x, \Theta) = n/(m+n)$

} FERMAT t.1 p.195 ; publié par Mersenne a.1644 }

·3 $m, n \varepsilon Q_0 . \supset . S[x^m(1-x)^n |x, \Theta] = S[x^n(1-x)^m |x, \Theta]$

·4 » $. n \geqq 1 . \supset .$ ——— $= n/(m+n+1) S[x^m(1-x)^{n-1} |x, \Theta]$

·5 ——————— $= n/(m+1) S[x^{m+1}(1-x)^{n-1}|x, \Theta]$

·6 $m \varepsilon Q_0 . n \varepsilon N_0 . \supset .$ ——— $= n! / \Pi[m+1+(0 \cdots n)]$

·7 $m, n \varepsilon N_0 . \supset .$ ——— $= m! n! / (m+n+1)!$

} STIRLING a.1730 p.125 }

L'intégrale considérée dans les P·3-·7 a été appelée " intégrale Eulérienne de première espèce " par Legendre, Exerc. t.1 p.221, t.2 p.3 ; et indiquée par le symbole B(p,q) par Binet JP. c.27 a.1839.

* 6·1 $f \varepsilon qf\Theta . l'\text{mod}f`\Theta \varepsilon Q . \supset . \text{mod} S'(f,\Theta) \leqq S'(\text{mod}f, \Theta)$

·2 » » $\text{mod} S_l(f,\Theta) \leqq$ »

lim * 10·1 $a \varepsilon q . f \varepsilon q f(a+Q_0) . \supset .$

$S(f, a+Q_0) = \int_a^\infty fx dx = \lim[S(f, a\,\bar{}\,b)|b, a+Q, \infty]$ Df

·2 $b \varepsilon q . f \varepsilon q f(b-Q_0) . \supset .$

$S(f, b-Q_0) = \int_{-\infty}^b fx dx = \lim[S(f, a\,\bar{}\,b)|a, b-Q, -\infty]$ Df

·3 $f \varepsilon qfq . \supset . S(f,q) = \int_{-\infty}^{+\infty} fx dx = \lim[S(f, a+Q_0)|a, q, -\infty]$ Df

·4 $u \varepsilon Cls'q . f \varepsilon q fu . \supset . S(f,u) =$

$S\{[\iota (qfq) \frown g \ni (x \varepsilon u . \supset_x . gx = fx : x \varepsilon q - u . \supset_x . gx = 0)], q\}$ Df

·41 $u, v \varepsilon Cls'q . -\exists(u \frown v) . f \varepsilon qf(u \smile v) . S(f,u), S(f,v) \varepsilon q . \supset .$

$S(f, u \smile v) = S(f,u) + S(f,v)$

·5 $a \varepsilon q . f \varepsilon Qf(a+Q_0) . S(f, a+Q_0) \varepsilon Q . \supset . 0 \varepsilon Lm(f, a+Q, \infty)$

·51 Hp P·5 $. \supset . 0 \varepsilon Lm(xfx |x, a+Q, \infty)$

·6 $a,b \varepsilon q . a < b . u \varepsilon qf(a\,\bar{}\,b) . l'\text{mod}\, u`(a\,\bar{}\,b) = \infty : c \varepsilon a\,\bar{}\,b . \supset_c .$

$l'\text{mod}\, u`(c\,\bar{}\,b) \varepsilon Q : \supset . S(u, a\,\bar{}\,b) = \lim[S(u, c\,\bar{}\,b) |c, a-b, a]$ Df

·7 ——————————————————————

$l'\text{mod}\, u`(a\,\bar{}\,c) \varepsilon Q$ ——————— $a\,\bar{}\,c$ ——— $b]$ —

·8 ——————————————— $c,d \varepsilon a-b . \supset_{c,d} .$

$l'\text{mod}\, u`(c\,\bar{}\,d) \varepsilon Q : \supset .$ Ths P·6 Df

Les intégrales définies par les P·1·2·3·6–·8 s'appellent "intégrales singulières Cauchy, ou impropres". Dans le cas où les Df·3·6 ne sont pas applicables, Cauchy considère encore la " valeur principale " de l'intégrale, qui, selon Riemann, n'a pas grande utilité.

lim Σ ✻ 11·0 $f \varepsilon (\mathrm{Q f Q_0})\mathrm{decr} \;.\supset:\; \Sigma(f,\mathrm{N_0})\, \varepsilon \mathrm{Q} \;.=.\; \mathrm{S}(f,\mathrm{Q_0})\, \varepsilon \mathrm{Q}$
} MacLaurin a.1742 p.289 {
[$\mathrm{Hp}\,.\, n\varepsilon \mathrm{N_0} \;.\supset.\; \Sigma(f, 0\cdots n) > \mathrm{S}[f, 0\dashv(n+1)] > \Sigma[f, 0\cdots(n+1)] - f0 \;.\supset.$ Ths]

·1 $f \varepsilon \mathrm{qf}(\Theta{:}\mathrm{N_0}) \,.\, \Sigma\}\mathrm{l'}\,\mathrm{mod}[f(x,r)\,|x`\Theta]\,|r, \mathrm{N_0}\}\, \varepsilon \mathrm{Q} \;:\supset.$
$\mathrm{S'}\}\Sigma[f(x,r)\,|r, \mathrm{N_0}]\,|x, \Theta\} \leqq \Sigma\}\mathrm{S'}[f(x,r)\,|x, \Theta]\,|r, \mathrm{N_0}\}$

·11 $(\mathrm{S_{\prime}}, \geqq) \,|\, (\mathrm{S'}, \leqq)$ P·1

·12 $\mathrm{Hp\,P{\cdot}1} : r\varepsilon \mathrm{N_0} \;.\supset_r.\; \mathrm{S}[f(x,r)\,|x, \Theta]\,\varepsilon \mathrm{q} \;:\supset.$
$\mathrm{S}\}\Sigma[f(x,r)\,|r, \mathrm{N_0}]\,|x, \Theta\} = \Sigma\}\mathrm{S}[f(x,r)\,|x, \Theta]\,|r, \mathrm{N_0}\}$ }Comm(S,Σ){
} Weierstrass : voir Thomé JfM. a.1866 t.66 p.334, t.71 p.353 ; Darboux a.1875 p.82 :
« Si tous les termes d'une série sont des fonctions continues ou discontinues susceptibles d'intégration, et si la série est uniformément convergente dans un intervalle donné (a,b), la fonction que représente la série, et qui n'est pas nécessairement continue, sera susceptible d'intégration. Son intégrale sera la somme des intégrales de tous ses termes ». {

Nous avons remplacé la condition de la convergence uniforme par une autre plus simple. Voir §lim 19.

·2 $\mathrm{S}(x^{-x}\,|x, \Theta) = 1-2^{-2}+3^{-3}-\ldots = {\cdot}783\ldots$
} Joh. Bernoulli, a.1694 t.1 p.185 {

·3 $n\varepsilon \mathrm{q} \;.\supset.\; \mathrm{S}(x^{-nx}\,|x, \Theta) = \Sigma[n^r (r+1)^{-(r+1)}\,|r, \mathrm{N_0}]$
} Euler a.1768 t.1 p.144: « Quæ ob concinnitatem terminorum omnino est notatu digna. » {

cont ✻ 12.

·1 $f\varepsilon (\mathrm{qf}\Theta)\mathrm{cont} \;.\supset.\; \mathrm{S}(f, \Theta)\, \varepsilon \mathrm{q}$ } Darboux a.1875 p.74 {

·11 $\mathrm{Hp{\cdot}1} \;.\supset.\; \mathrm{S}(f,\Theta) = \lim \Sigma[f(r/n)\,|r, 1\cdots n]\,|n$

·2 $k\varepsilon \mathrm{Cls`q} \,.\, k = \delta k \,.\, a\varepsilon k \,.\, f\varepsilon [\mathrm{q\,f}(k{:}\Theta)]\mathrm{cont} \;.\supset.$
$\lim\}\mathrm{S}[f(x,y)\,|y, \Theta]\,|x, k, a\} = \mathrm{S}[f(a,y)\,|y, \Theta]$ }Comm(lim,S){

·21 $\mathrm{Hp{\cdot}2} \;.\supset.\; \mathrm{S}[f(x,y)\,|y, \Theta]\,|x \;\varepsilon\; (\mathrm{qf}k)\mathrm{cont}$

·3 $f\varepsilon [\mathrm{qf}(\Theta{:}\Theta)]\mathrm{cont} \;.\supset.\; \mathrm{S}\}\mathrm{S}[f(x,y)\,|x, \Theta]\,|y, \Theta\} =$
$\mathrm{S}\}\mathrm{S}[f(x,y)\,|y, \Theta]\,|x, \Theta\}$

Sur l'inversion des intégrations voir O. Stolz, Grundzüge der Differential- und Integralrechnung, t.3 a.1899.

D ✻ 20.

·1 $a,b \varepsilon q \,.\, a<b \,.\, f, Df \,\varepsilon\, qF\, a \neg b \,.\, S(Df, a \neg b) \,\varepsilon q \;.\supset.$
$S(Df, a \neg b) = fb - fa$

[$n \varepsilon N_1 \,.\, x \varepsilon (a \neg b)\, f\, 0 \cdots n$ cres $.\, x_0 = a \,.\, x_n = b \;.\supset.$
$fb - fa = \Sigma[(fx_{r+1} - fx_r)\,|r, 0 \cdots (n-1)]$
§D4·4 $.\supset.$ » $\varepsilon\, \Sigma[(x_{r+1} - x_r)\, \text{Med}\, Df\text{'}(x_r \neg x_{r+1})\,|r, 0 \cdots (n-1)]$
Hp $.\supset.\; fb - fa \,\varepsilon\, y \ni \{n \varepsilon N_1 \,.\, x \varepsilon (a \neg b)\, f\, 0 \cdots n)$ cres $.\, x_0 = a \,.\, x_n = b \;.\supset_{n,x}.$
$y \varepsilon \Sigma[(x_{r+1} - x_r)\, \text{Med}\, Df\text{'}(x_r \neg x_{r+1})\,|r, 0 \cdots (n-1)]\} \,.\,$ P1·0 $.\supset.$ P]

·11 $a,b \varepsilon q \,.\, a<b \,.\, f \,\varepsilon\, qF\, a \neg b \,.\, Df \,\varepsilon\, (qF\, a \neg b)\text{cont} \;.\supset.$ ThsP·1

·12 $a,b \varepsilon q \,.\, a<b \,.\, f, Df \,\varepsilon\, qF\, a \neg b \,.\, l'Df\text{'}a \neg b,\; l_{,}Df\text{'}a \neg b \,\varepsilon q \;.\supset.$
$S_{,}(Df, a \neg b) \leqq fb - fa \leqq S'(Df, a \neg b)$
{ PRINGSHEIM MünchenB. a.1899 p.57 }

·2 $a,b \varepsilon q \,.\, a<b \,.\, f \varepsilon (qF a \neg b)\text{cont} \,.\, x \varepsilon a \neg b \;.\supset.$
$D[S(f, a \neg z)\,|z, a \neg b, x] = fx$

·3 $a,b \varepsilon q \,.\, a<b \,.\, f \varepsilon qF a \neg b \,.\, Df \,\varepsilon\, (QF a \neg b)\text{cont} \,.$
$g \varepsilon [qF(fa \neg fb)]\text{cont} \;.\supset.\; S(g, fa \neg fb) = S(gfx \times Dfx\,|x, a \neg b)$

·4 $a,b \varepsilon q \,.\, a<b \,.\, f, g, Df, Dg \,\varepsilon\, (qF\, a \neg b)\text{cont} \;.\supset.$
$S(f \times Dg, a \neg b) = (fb)(gb) - (fa)(ga) - S(g \times Df, a \neg b)$

Les P·3·4 expriment les règles d'intégration " par substitution " et " par parties ".

·5 $k \varepsilon \text{Cls'}q \,.\, k \supset \delta k \,.\, z \varepsilon k \,.\, f \,\varepsilon\, q\,f(\Theta{:}k) \,.\, D[f(x,y)\,|y, k, y]\,|(x,y) \,\varepsilon$
$[q\,f(\Theta{:}k)]\text{cont} \;.\supset.\; D\{S[f(x,y)\,|x, \Theta]\,|y, k, z\} = S\{D[f(x,y)$
$|y, k, z]\,|x, \Theta\}$ { Comm(D, S) }
{ LEIBNIZ a.1697 MathS. t.3 p.450 }

✻ 21.

·0 $f, Df \,\varepsilon\, (qF\Theta)\text{cont} \,.\, n \varepsilon N_0 \;.\supset.$
$S[(1-t)^n ft\,|t, \Theta] = f0/(n+1) + /(n+1)\, S[(1-t)^{n+1} Dft\,|t, \Theta]$
[P20·3 $.\, g = (1-t)^{n+1}/(n+1)\,|t \;.\supset.$ P]

·04 $n \varepsilon N_1 \,.\, f, D^n f \,\varepsilon\, (qF\Theta)\text{cont} \;.\supset.$
$f1 = \Sigma[(D^r f0)/r!\,|r, 0 \cdots (n-1)] + /(n-1)!\, S[(1-t)^{n-1} D^n ft\,|t, \Theta]$
[P20·1 . 21·0 $.\supset.\; f1 = f0 + S(Df, \Theta)$
$S(Df, \Theta) = Df0 + S[(1-t)D^2 ft\,|t, \Theta]$
$S[(1-t)D^2 ft\,|t, \Theta] = D^2 f0/2 + /2\, S[(1-t)^2 D^3 ft\,|t, \Theta]$
. . . .
$S[(1-t)^{n-2} D^{n-1} ft\,|t, \Theta] = D^{n-1} f0/(n-1) + /(n-1)\, S[(1-t)^{n-1} D^n ft\,|t, \Theta]$
$.\supset.$ P]

·1 $a, h \varepsilon q \,.\, n \varepsilon N_1 \,.\, f, D^n f \,\varepsilon\, [qF(a+\Theta h)]cont \;.\!\supset.$
$f(a+h) = \Sigma[h^r/r!\, D^r fa \,|\, r, 0\cdots(n-1)] +$
$h^n/(n-1)!\; S[(1-t)^{n-1} D^n f(a+th) \,|\, t, \Theta]$
} LAGRANGE a.1798 Th des fonctions Anal. p.42 ; Œuvres t.9 p.73 {
[$:[f(a+th)|t] \,|\, f$:P·01 .Ɔ. P]

❊ 22·1 $f \varepsilon qF\Theta \,.\, D^2 f \,\varepsilon\, (\iota 0)F\Theta \;.\!\supset.\; Sf = (f0+f1)/2 = f(/2)$
·2 $f \varepsilon qF\Theta \,.\, D^4 f \,\varepsilon\, (\iota 0F\Theta) \;.\!\supset.\; Sf = (f0 + 4f(/2) + f1)/6$
$= [(f0+3f(1/3)+3f(2/3)+f1]/8$
·3 » $.\, D^6 f$ » $.\!\supset.$
$Sf = [7f0+32f(1/4)+12f(2/4)+32f(3/4)+7f1]/90$
$= [19f0+75f(1/5)+50f(2/5)+50f(3/5)+75f(4/5)+19f1]/288$
·4 $f \varepsilon qF\Theta \,.\, D^8 f \,\varepsilon\, (\iota 0)F\Theta \;.\!\supset.\; Sf = [41f0+216f(1/6)+27f(2/6)$
$+272f(3/6)+27f(4/6)+216f(5/6)+41f1]/840 = \{751[f0+f1]+$
$3577[f(1/7)+f(6/7)+1323[f(2/7)+f(5/7)+2989[f(3/7)+f(4/7)]\}/17280$
·5 $f \varepsilon qF\Theta \,.\, D^{10} f \,\varepsilon\, (\iota 0)F\Theta \;.\!\supset.\; Sf = \{989[f0+f1]+5888[f(1/8)+$
$f(7/8)]-928[f(2/8)+f(6/8)]+10496[f(3/8)+f(5/8)]-4540f(4/8)\}/28350$
$= \{2857[f0+f1]+15741[f(1/9)+f(8/9)]+1080[f(2/9)+f(7/9)]+$
$19344[f(3/9)+f(6/9)]+5778[f(4/9)+f(5/9)]\}/89600$
·6 $f \varepsilon qF\Theta \,.\, D^{12} f \,\varepsilon\, (\iota 0)F\Theta \;.\!\supset.\; Sf = \{16067[f0+f1]+106300[$
$f(1/10)+f(9/10)]-48525[f(2/10)+f(8/10)]+272400[f(3/10)+f(7/10)]$
$-260550[f(4/10)+f(6/10)]+427368f(5/10)\}/598752 = \ldots$
} ·2-·6 COTES a.1722 *Opuscula* p.33 {

❊ 23.
·1 $f, D^2 f \,\varepsilon\, qF\Theta \;.\!\supset.\; S(f,\Theta) - f(/2) \;\varepsilon\; (D^2 f`\theta)/24$
·2 » » » $S(f,\Theta) - (f0+f1)/2 \;\varepsilon\; -(D^2 f`\theta)/12$
·3 $f, D^4 f \,\varepsilon\, qF\Theta \;.\!\supset.$
$S(f,\Theta) - [f0 + 4f(/2) + f1]/6 \;\varepsilon\; -(D^4 f`\theta)/(4!\,5!)$

Les P22 sont dites " formules de quadrature ". Nous avons donné les expressions P23 des restes dans les " *Applicazioni geometriche* a.1887 ".

Continuation : §e 5 . §log 5 . §q_n 40 . §Subst 14 . §q' 21.

§76 e

$/ \upharpoonright$ Q lim ✱ 1·0 $\mathrm{e} = \lim[(1+/m)^m|m, \mathrm{Q}, \infty]$ Df

·01 $\mathrm{e} = \mathrm{l}'[(1+/m)^m|m \text{ ‘ } \mathrm{Q}]$ Dfp

[§Q 61·3 $.\supset.$ $(1+/m)^m|m \; \varepsilon \; (\mathrm{QfQ})\mathrm{cres}$. §lim 1·5 $.\supset.$ P]

·02 $\mathrm{e}\varepsilon\mathrm{Q}$ [$m,n\varepsilon\mathrm{Q}$. §Q 61·7 $.\supset.$ $(1+/m)\upharpoonright m < (1+/n)\upharpoonright(n+1)$ $.\supset.$ P]

·03 $\mathrm{e} = \mathrm{l}_{\prime}\{[(m+1)/m]^{m+1}|m \text{ ‘ } \mathrm{Q}\} = \mathrm{l}_{\prime}[(1-/m)^{-m}|m \text{ ‘ } (1+\mathrm{Q})]$

·1 $m\varepsilon\mathrm{Q} \;.\supset.\; (1+/m)^m < \mathrm{e}$ [P·01 $\supset$ P]

·11 ——— $\mathrm{e} < (1+/m)^{m+1}$ [P·03 $\supset$ P]

·2 $2 < \mathrm{e} < 3$ [$(1|m)$P·1 . $(5|m)$P·11 $.\supset.$ P]

e = 2·71828 18284 59045 23536 02874 71352 66249 77572
47093 69995 95749 66967 62772 40766 30353 54759
45713 82178 52516 64274 27466 39193 20030 59921
81741 35966 29043 57290 03342 95260 59563 07381
32328 62794 34907 63233 82988 07531 95251 01901
15738 34187 93070 21540 89126 94937 99405 34631
93819 87250 90567 36251 50082 37715 27509 03586
67692 05047 15575 85094 92906 45748 86005 84299
93465 94757 59371 00435 26480 0...

Le nombre « e » a été calculé: jusqu'à 12 chiffres décimaux par:
R. Cotes, *Logometria*, a.1714 p.11 ; il l'appelle « Ratio Modularis »;
à 23 chiffres par Euler, PetrC. a.1739 p.187, qui l'a indiqué par « e » ;
à 42 chiffres par Vega, *Thesaurus logarithmorum*, a. 1794, p. 309 ;
à 188 chiffres par W. Shanks, LondonP. t.6 a.1854 p.397 ;
et enfin jusqu'à 346 chiffres par:
M. Boorman, *Math. Magaz.*, t.I, a.1884, p.204.

e = !. · !.!!.!!! !!!....! .!.!...! (expression de e dans le système binaire)

·3 $\mathrm{e}, \mathrm{e}^2 \,\varepsilon\, \mathrm{Q}{-}\mathrm{R}$ { Euler a.1737 PetrC. t.9 p.98 }

·31 $x\varepsilon\, \mathrm{r}{-}\iota 0 \;.\supset.\; \mathrm{e}^x {-}\varepsilon \mathrm{R}$ { Lambert a.1761 p.265 }

·32 $\mathrm{e} {-}\varepsilon\, \mathrm{R} \pm \sqrt{}\mathrm{R}$ { Liouville JdM. a.1840 t.5 p.193 }

·4 $x\varepsilon\, \mathrm{q}{-}\iota 0 \;.\supset.\; \mathrm{e}^x > 1+x$

[$x\varepsilon\mathrm{Q}$. $(/x)|m$ P·1 $.\supset.$ $(1+x)\upharpoonright/x < \mathrm{e}$ $.\supset.$ Ths
$x\varepsilon -\mathrm{Q}$. $x > -1$. $(-/x-1)|m$ P·11 $.\supset.$ Ths
$x\varepsilon -\mathrm{Q}$. $1+x < 0$ $.\supset.$ Ths]

·41 $x\varepsilon\theta \;.\supset.\; \mathrm{e}^x < /(1-x)$ [$(-x)|x$ P·4 $\supset$ P]

·5 $x \varepsilon q . \supset . \lim (1+x/m)^m | m = e^x$

} EULER Berol. Misc. a.1743 t.7 p.177:

« $e^z = \left(1+\frac{z}{n}\right)^n$ existente n numero infinito. » {

·6 $\lim [(e^x-1)/x \,|x, q, 0] = 1$

·61 $\lim n / \sqrt[n]{(n!)} \,|n = e$

·62 $\lim \sqrt[n]{[(2n)! / (n!n)]} \,|n = 4/e$

Σ ✻ 2.

·1 $x \varepsilon q . \supset . e^x = 1+x+x^2/2!+x^3/3!+ \ldots = \Sigma(x^n/n! \,|n, N_0)$

} NEWTON, 13 junii, a. 1676:

« (Area hyperbolae) $= \frac{z}{b} + \frac{zz}{2abb} + \frac{z^3}{6aab^3} + \frac{z^4}{24a^3b^4} + \frac{z^5}{120a^4b^5}$ etc. ubi coefficientes denominatorum prodeunt multiplicando terminos hujus arithmeticae progressionis, 1, 2, 3, 4, 5 etc. in se continuo: et hinc ex logarithmo dato potest numerus ei competens inveniri. » {

} LEIBNIZ, 27 Aug. 1676:

« Si sit numerus aliquis Unitate minor $1-m$, ejusque Logarithmus Hyperbolicus l, erit $m = \frac{l}{1} - \frac{l^2}{1\times2} + \frac{l^3}{1\times2\times3} - \frac{l^4}{1\cdot2\cdot3\times4}$ etc. Si numerus sit major Unitate, ut $1+n$, tunc pro eo inveniendo mihi etiam prodiit Regula, quae in Newtoni Epistola expressa est; scilicet erit $n = \frac{l}{1} + \frac{l^2}{1\cdot2} + \frac{l^3}{1\times2\times3} + \frac{l^4}{1\times2\times3\times4}$ etc. » {

[P1·5 $. \supset . e^x = \lim (1+x/m)^m \,|m = \lim \Sigma[C\, m,r\, x^r / m^r \,|r, N_0] \,|m = \lim \Sigma \{\Pi[1-s/m \,|s, 0\cdots r-1]\, x^r / r! \,|r, N_0\} \,|m = \Sigma (x^r / r! \,|r, N_0)$]

·2 $e = 1 + \Sigma /(N_1!) = \Sigma(/n! \,|n, N_0)$ [P·1 . $x=1 . \supset .$ P] Dfp

·3 $n \varepsilon N_1 . \supset . e - \Sigma(/r! \,|r, 0\cdots n) \,\varepsilon\, \theta/(n!n)$

} FOURIER; Voir Stainville, *Mélanges d'Analyse*, a.1815 p.339; CAUCHY a.1821 p.118 {

·4 $n \varepsilon N_1 . a \varepsilon \mathrm{rf}\, 1\cdots n . \supset . e^n + \Sigma(a_r e^{n-r} \,|r, 1\cdots n) -= 0$

} HERMITE a.1873 ParisCR. t.77; cfr. GORDAN a.1893 MA. t.43 {

E β ✻ 3·1 $\mathrm{E}\, e = 2 . \mathrm{E} /\beta\, e = 1$

$n \varepsilon N_1 . \supset . \mathrm{E}(/\beta)^{3n-2} e = 2n . \mathrm{E}(/\beta)^{3n} e = \mathrm{E}(/\beta)^{3n-1} e = 1$

} COTES *Logometria*, p.7:

« Dividatur ... 2,71828 &c. per 1, ... & rursus minor per numerum qui reliquus est, & hic rursus per ultimum residuum, atque ita porro pergatur: & prodibunt quotientes 2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, 1, 1, 12, 1, 1, 14, 1, 1, 16, 1, 1, &c. » {

·2 $n \varepsilon N_1 . \supset . \mathrm{E}(/\beta)^n [(e-1)/(e+1)] = 2+4(n-1)$

} EULER a.1748 p.319 {

D ✻ 4·1 $x\varepsilon\text{q} \,.\supset.\, \text{D}(\text{e}^x|x, \text{q}, x) = \text{e}^x$

·2 $a\varepsilon\text{q} \,.\, x\varepsilon\, \text{qFq} \,.\, \text{D}x = ax \,.\, t\varepsilon\text{q} \,.\supset.\, xt = (x0)\, \text{e}\!\upharpoonleft\!(at)$

Continuation : §Subst 14·1

S ✻ 5·1 $\text{S}(\text{e}^{-x}|x, \text{Q}) = 1$ ·11 $a\varepsilon\text{Q} \,.\supset.\, \text{S}(\text{e}^{-ax}|x, \text{Q}) = /a$

·2 $n\varepsilon\text{Q} \,.\supset.\, \text{S}(\text{e}^{-x}x^n|x, \text{Q}) = n\text{S}(\text{e}^{-x}x^{n-1}|x, \text{Q})$

·21 $n\varepsilon\text{N}_0 \,.\supset.\, \text{S}(\text{e}^{-x}x^n|x, \text{Q}) = n!$

·22 $n\varepsilon\text{N}_0 \,.\, a\varepsilon\text{Q} \,.\supset.\, \text{S}(\text{e}^{-ax}x^n\,|x, \text{Q}) = n!/a^{n+1}$

·3 $n\varepsilon\text{N}_0 \,.\, x\varepsilon\text{Q}_0 \,.\supset.\, \text{e}^x\text{S}(\text{e}^{-z}z^n|z, x+\text{Q}) = n!\,\Sigma(x^r/r!\,|r, 0\cdots n)$

·4 $n\varepsilon\text{N}_0 \,.\, x\varepsilon\text{Q}_0 \,.\supset.$

$x\text{e}^x\text{S}(\text{e}^{-z}/z\,|z, x+\text{Q}) - \Sigma[(-1)^r r!x^{-r}\,|r, 0\cdots(n-1)]\ \varepsilon\ \theta(-1)^n n!x^{-n}$

§77 log

✻ 1·0 $x \varepsilon \mathrm{Q} \,.\supset.\, \log x = \iota\, \mathrm{q} \frown \bar{z} \ni (\mathrm{e} \upharpoonright z = x) = {}^{\mathrm{c}}\mathrm{Log}\, x$ Df

·1 $x \varepsilon (-1+\mathrm{Q}) - \iota 0 \,.\supset.\, \log(1+x) < x$ [§e P·4 $\supset$ P]

·11 » » $> x/(1+x)$

[$\{-x/(1+x)\} \,|x$ P·1 $\supset$ P]

·2 $x \varepsilon \mathrm{Q} - \iota 1 \,.\, m \varepsilon \mathrm{N}_1 \,.\supset.\, m(\sqrt[m]{x} - 1) > \log x > m(1 - \sqrt[m]{/x})$

[$(\sqrt[m]{x} - 1) \,|x$ P·1 $\supset$ P]

·3 $x \varepsilon \mathrm{R} - \iota 1 \,.\supset.\, \log x - \varepsilon\, \mathrm{r}$ { LAMBERT a.1761 p.265 }

lim ✻ 2·0 $x \varepsilon \mathrm{Q} \,.\supset.\, \mathrm{lim}(\log, \mathrm{Q}, x) = \log x$

·01 $a \varepsilon \mathrm{Q} \,.\supset.\, \lim n(\sqrt[n]{a} - 1) \,|n = \log a$ [P1·2 $.\supset.$ P]

·1 $x \varepsilon \mathrm{q} \,.\, -1 < x \leqq 1 \,.\supset.\, \log(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 - \ldots$

{ MERCATOR a.1668 p.32:

« Hinc posito ..... 0[1 = numero terminorum: invenio, ...

Version En posant 0·1 = x je trouve

aream ...= numero terminorum = 0[1, minus summa eorundem

$\log(1+x)$ = x = 0·1 — $\int x\mathrm{d}x = x^2/2$

terminorum = 0|005, plus summa quadratorum ab iisdem =

= 0·005 + $\int x^2\mathrm{d}x = x^3/3$ — etc.

0|000333333, minus summa cuborum = 0|000025, plus summa quadrato - quadratorum = 0|000002, minus summa quadrato cuborum = 0|000000116, plus summa cubo - cuborum = 0|000000013, &c. » }

[P·01 $.\supset.$ $\log(1+x) = \lim n[\sqrt[n]{(1+x)} - 1] \,|n$

§lim 23·1 $.\supset.$ » $= \lim n\{\Sigma[\mathrm{C}(/n, r)x^r \,|r, 0\cdots n] - 1\} \,|n$

» $= \lim \Sigma[n\,\mathrm{C}(/n, r)x^r \,|r, 1\cdots n] \,|n$ (1)

$r \varepsilon \mathrm{N}_1 \,.\supset.\, \lim n\mathrm{C}(/n, r) \,|n = (-1)^{r-1}/r$ (2)

(1) . (2) . §lim 19·6 $.\supset.$ P]

·2 $\log 2 = 1 - /2 + /3 - /4 + \ldots$ [P·1 . $x=1$ $.\supset.$ P]

·21 $\log 2 = /2 + /(2\times 2^2) + /(3\times 2^3) + \ldots$ [P·1 . $x=-/2$ $.\supset.$ P]

·3 $x \varepsilon \mathrm{Q} \,.\supset.\, \log(x+1) - \log x = 2\{/(2x+1) + /[3(2x+1)^3] + \ldots\}$

$= 2\Sigma\{/[(2n+1)(2x+1)^{2n+1}] \,|n, \mathrm{N}_0\}$

{ GREGORIUS a.1668 p.12 }

[P·1 . $x \varepsilon \theta$ $.\supset.$ $\log(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 - \ldots$. $\log(1-x) = -x - x^2/2 - \ldots$.

$\supset.$ $\log[(1+x)/(1-x)] = 2(x + x^3/3 + x^5/5 + \ldots)$ (1)

$[/(2x+1)] \,|x$ (1) $.\supset.$ P]

·31 $\log 2 = 2[\,/3 + /(5\times 3^5) + /(7\times 3^7) + \ldots$ [P·3 . $x=1$.⊃: P]

·4 $\log[(a+b)/2] = (\log a + \log b)/2 + \Sigma\{[(a-b)/(a+b)]^n/n \mid n, N_1\}$

·5 $^{10}\mathrm{Log}\, e = /(\log 10) = 0{\cdot}43429448\ldots$

Ce nombre, dit « module des logarithmes décimaux » a été calculé avec 282 chiffres par Adams, LondonP. a.1878 p.93.

·6 $m\varepsilon N_1$.⊃. $\lim \Sigma / (n \cdots mn) \mid n = \log m$

·61 $m,n\varepsilon N_1 . m<n$.⊃. $\lim \Sigma/(mp \cdots np) \mid p = \log(m/n)$

} Joh. Bernoulli II a.1729 CorrM. t.2 p.300:

« Si l'on coupe la progression harmonique $1/x$ … en deux parties … soit la raison du nombre des termes dans la première et seconde partie comme m à n, la somme de tous les termes de cette seconde partie sera $= \log[(m+n)/n]$. »{

·7 $a\varepsilon$ Q$-\iota$1 . $x\varepsilon$Q .⊃. $^a\mathrm{Log}\,x = (^a\mathrm{Log}\, e) \log x = (\log x)/(\log a)$

·8 $a\varepsilon$ (e↾$-$/e)$^{\frown}$1 .⊃.

$\lim (a\!\upharpoonright)^n 1 \mid n = \Sigma\{(n+1)^{n-1}(\log a)^n/n! \mid n, N_0\}$

} Euler PetrA. a.1777 t.1 {

} Eisenstein JfM. a1844 t.27 p.51 :

$$a^{a^{a^{\cdot^{\cdot}}}}\ (in\ inf.) = 1 + \log a + 3\frac{(\log a)^2}{2!} + 4^2\frac{(\log a)^3}{3!} + \text{etc.}$$

und dieses Resultat gilt

von $a = \dfrac{1}{e\sqrt[e]{e}} = 0{,}6922\ldots$ (excl.) *bis* $a=1$ (incl.) . {

Np ✻ 3·1 $a\varepsilon\theta$.⊃.

$\lim \{[\mathrm{Num}(\mathrm{Np} \frown 2\cdots n) - \Sigma/\log{}^{\cdot}(2\cdots n)]\times n\!\upharpoonright\!(a+/2)\} \mid n = 0$

} Jensen AM. a.1899 t.22 p.364 {

·2 $n\varepsilon N_1$.⊃.

$\lim\{[\mathrm{Num\,Np} \frown 1\cdots x]/x - \Sigma[r!/(\log x)^{r+1} \mid r, 0\cdots n]\}(\log x)^{n+2} \mid x = (n+1)!$

} Tchebychef JdM. a.1848 t.17 p.384 {

D ✻ 4·1 $x\varepsilon$Q .⊃. D(log, Q, x) = $/x$

[D(log,Q,x) = lim {[log($x+h$)$-$log$x$]/h | h, Q$-x$, 0{
= lim{ [log(1+h/x)]/h » » »
= $/x \times$ lim{ log(1+h/x)↾(x/h) » » » = $/x$]

·11 $a\varepsilon$ Q$-\iota$1 . $x\varepsilon$Q .⊃. D(^{a}Log$x$ | x, Q, x) = ^{a}Log e $/x$

·2 $a\varepsilon$Q . $x\varepsilon$q .⊃. D(a^x | x, q, x) = $a^x \log a$

·21 Hp ·2 . $n\varepsilon N_1$.⊃. $D^n(a^x \mid x, q, x) = a^x(\log a)^n$

·3 $x\varepsilon$Q . $n\varepsilon N_1$.⊃. $D^n(\log, Q, x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\, x^{-n}$

·4 $x\varepsilon$Q . $n\varepsilon N_1$.⊃.

$D^n(\log x / x \mid x, Q, x) = (-1)^n n!\, x^{-n-1}[1 - \Sigma/(1\cdots n)]$

S ✻ 5·1 $a,b\varepsilon$Q . $a<b$.⊃. S(/, a⌐b) = log(b/a)

§78 *C*

Σ lim log *C*

·0 $C = \lim \}\Sigma/(1 \cdots n) - \log n\{ \, | n$ Df

·1 $C = \text{l}' \}\Sigma/(1 \cdots n) - \log n\{ \, | n \text{`} N_1 = \text{l}, \}\Sigma/[1 \cdots (n+1)] - \log n\{ | n \text{`} N_1$

·2 $C = 0\cdot$

57721 56649 01532 86060 65120 90082 40243 10421 59335 93992
35988 05767 23488 48677 26777 66467 09369 47063 29174 67495
14631 44724 98070 82480 96050 40144 86542 83622 41739 97644
92353 62535 00333 74293 73377 37673 94279 25952 58247 09491
60087 35203 94816 56708 53233 15177 66115 28621 19950 15079
84793 74508 569 . .

La constante *C* a dans l'analyse la plus grande importance, après les constantes π et e.

Elle est dite « constante d'Euler », et quelques fois « de Mascheroni ».

Euler, PetrC., a.1734-35 t.7 p.156 l'a indiquée par *C*; dans d'autres cas par *O*; Mascheroni par *A*. Plusieurs A. l'indiquent par γ; notation qu'on ne rencontre pas dans Euler, ni dans Mascheroni (contrairement à l'opinion de plusieurs A.).

Euler, ibid. a calculé E(10^6 *C*), ensuite il a calculé E($10^{10}C$) dans a.1744 CorrM. t.1 p.283; et E($10^{15}C$) dans PetrNC. a.1769 t.14 I p.154.

Mascheroni, a.1790	a calculé	E(10^19 *C*)		
Gauss, a.1812 *Werke*, t.3 p.154	»	»	23	»
Nicolai,	»	»	45	»
Glaisher, LondonP. a.1871 t.19 p.54	»	»	100	»
Adams, » » a.1878 t.28 p.88	»	»	263	»

·3 $C = \Sigma N_1^{-2}/2 - \Sigma N_1^{-3}/3 + \ldots = \Sigma\}(-1)^n (\Sigma N_1^{-n}/n) \, | n, N_1+1\{$

·4 $C = \Sigma\} \, \Sigma(N_1+1)^{-n}(n-1)/n \, | n, N_1+1\{$

} ·3·4 Euler PetrNC. a.1769 p.154 {

·5 $1 - C = \Sigma\} \, \Sigma(N_1+1)^{-n}/n \, | n, N_1+1\{$

} Euler PetrA. a.1781 t.5 II p.45 {

Continuation §B ·5.

QUATRIÈME PARTIE

NOMBRES COMPLEXES

§80 q_n = (nombre complexe d'ordre n)

q ✻ 1·0 $n \varepsilon N_1 . \supset . q_n = qF(1 \cdots n)$ Df

$n \varepsilon N_1 . a,b,c \varepsilon q_n . h,k \varepsilon q . \supset :$ ·01 $(a_1,a_2,\ldots a_n) = a$ Df

·02 $a = b .=: r \varepsilon 1 \cdots n . \supset_r . a_r = b_r$ [§F P·5 .⊃. P]

·1 $a+b = \iota\, q_n \frown x \ni (r \varepsilon 1 \cdots n . \supset_r . x_r = a_r + b_r)$

$= [(a_r + b_r) \,|\, r, 1 \cdots n]$ Df

·11 $(a_1,a_2,\ldots a_n)+(b_1,b_2,\ldots b_n) = (a_1+b_1, a_2+b_2, \ldots a_n+b_n)$ [=P·1]

·12 $a+b = b+a \;.\; a+(b+c) = (a+b)+c = a+b+c$

·2 $0 = \iota[(\iota 0)F(1 \cdots n)] = (0,0,\ldots 0)$ Df ·21 $a+0 = a$

·3 $-a = \iota\, q_n\, x \ni (a+x = 0)$ Df ·31 $-0 = 0$

·32 $-(a_1,a_2,\ldots a_n) = (-a_1, -a_2, \ldots -a_n)$

·33 $a-b = a+(-b)$ Df ·34 $a-a = 0$

·4 $ha = \iota\, q_n \frown x \ni (r \varepsilon 1 \cdots n . \supset_r . x_r = ha_r)$ Df

·41 $h(a_1,a_2,\ldots a_n) = (ha_1, ha_2, \ldots ha_n) \;.\; ha \,\varepsilon\, q_n \;.\; 1a = a \;.$

$h(a+b) = ha+hb \;.\; (h+k)a = ha+ka \;.\; h(ka) = (hk)a = hka$

✻ 2. q_n unit

$n \varepsilon N_1 . r \varepsilon 1 \cdots n . \supset .$

·0 $\text{unit}(n,r) = \iota\, q_n \frown x \ni (x_r = 1 : s \varepsilon (1 \cdots n) - \iota r . \supset_s . x_s = 0)$ Df

$a,b \varepsilon q_n . h \varepsilon q . \supset .$

·1 $a = \Sigma[\, a_s \,\text{unit}(n,s) \,|\, s, 1 \cdots n]$

·2 $a+b = \Sigma[(a_s+b_s)\,\text{unit}(n,s) \,|\, s, 1 \cdots n]$ Dfp

·3 $ha = \Sigma[(ha_s)\,\text{unit}(n,s) \,|\, s, 1 \cdots n]$ Dfp

Note. Le nombre complexe d'ordre n est le système de n nombres réels. Nous définissons la somme de deux complexes, le complexe 0, l'opération —, et la multiplication d'un complexe par un nombre réel. (P1·1·2·3·4).

L'unité d'ordre n et de rang r, indiquée par « unit(n,r) », est le complexe dont l'élément de rang r est 1, et tous les autres sont nuls. (P2·0).

Weierstrass les appelle " Haupteinheiten ". Les nombres a_1 a_2... a_n sont les " coordonnées " du complexe a.

La P3·0 définit le module d'un complexe.

Ces opérations très simples suffisent pour appliquer les nombres complexes à la simplification de plusieurs théories. Il n'y a pas une multiplication simple de deux complexes. H. Grassmann a considéré les divers genres de multiplication dans JfM. a.1855 p.123 ; le plus important est le produit alterné, qui conduit aux Dtrm. La multiplication se présente naturellement dans les Subst.

La nomenclature sur ces sujets, q_n et Subst, est très variée chez les différents A.

mod ✱ 3. $n \varepsilon N_1 . x,y \varepsilon q_n . a \varepsilon q . \supset .$

·0 $\text{mod}x = \sqrt{(x_1^2+x_2^2+...+x_n^2)} = \sqrt{\Sigma(x^2)}$ Df

·1 $\text{mod}x \, \varepsilon Q_0$ ·2 $\text{mod}(x+y) \leqq \text{mod}x + \text{mod}y$

[§Σ P20·1 $. \supset . (x_1^2+x_2^2+...)(y_1^2+y_2^2+...) \geqq (x_1y_1+x_2y_2+...)^2$.

P·0 $. \supset .$ $\text{mod}x \, \text{mod}y \geqq x_1y_1+x_2y_2+...$

$. \supset .$ $(\text{mod}x)^2+(\text{mod}y)^2+2 \, \text{mod}x \, \text{mod}y \geqq (x_1+y_1)^2+(x_2+y_2)^2+...$

$. \supset .$ $(\text{mod}x+\text{mod}y)^2 \geqq [\text{mod}(x+y)]^2 . \supset .$ Ths]

·3 $\text{mod}\, ax = \text{mod}a \, \text{mod}x$ ·4 $\text{mod}x = 0 .=. x = 0$

Num ✱ 4. $n \varepsilon N_1 . \supset .$ Num q_n = Num q

{ G. Cantor JfM. a.1877 p.242 ; AM. a.1883 a.315 {

Med ✱ 5. $n \varepsilon N_1 . u \varepsilon$ Cls'$q_n . \supset .$ ·0 Med$u$ =

$q_n \frown x \ni \{ a \varepsilon q_n . \supset_a . \Sigma(a_r x_r | r, 1 \cdots n) \varepsilon$ Med$[\Sigma(a_r z_r | r, 1 \cdots n) | z`u)] \}$ Df

Ex. P33·1·2.

(q_n | q) §Med P1·1·2·4·5 . P2·1·2·3·41 . P3·1-·4

λ Λ ✱ 11. (q_n |q)§λ P1·0-·33

✱ 12. ———P2·1·2·6

✱ 13. $u \varepsilon$ Cls'$q_n . \supset .$ ·0 $\infty \varepsilon \Lambda u .=.$ l'mod$u = \infty$ Df

·1 $\Lambda u = \lambda u \cup [(\iota \infty) \frown \Lambda u]$ Df ·2 $\lambda u = q \frown \Lambda u$

δ ✱ 14. (q_n | q) §δ

Int ✱ 15. ——— §Int

Lm ✱ 21. $m,n \varepsilon N_1 . u \varepsilon$ Cls'$q_n . x \varepsilon \delta u . f \varepsilon q_mfu . \supset .$ §Lm P4·0-·7

·8 $a \varepsilon q_m . \supset : a \varepsilon$ Lm$(f,u,x) .=. 0 \varepsilon$ Lm$[\text{mod}(fy-a)|y, u, x]$

·9 $\infty \, \varepsilon$ Lm$(f,u,x) .=. \infty \, \varepsilon$ Lm(modf,u,x)

✱ 22. (q_n | q) §Lm P5

✱ 23. $m,n \varepsilon N_1 . u \varepsilon$ Cls'q_n . l' mod$u = \infty . f \varepsilon q_mfu . \supset .$ §Lm P6·1

lim 24. Hp P21 .⊃. §lim P2·0-·4

·5 ∞ = lim(f,u,x) .=. ∞ = lim(mod$f$, u, x)

·6 $a\varepsilon q_m$.⊃: a = lim(f,u,x) .=. 0 = lim mod($fy-a$) | y, u, x]

✻ 25·1 $u\varepsilon q_n f N_0$. Σ(mod$u$,N_0) εQ .⊃. Σ(u,N_0) εq_n

·2 $m\varepsilon N_1$. $a\varepsilon$ Q+m .⊃. Σ[/(mod$r$)^a |r, (nF1···m)-ι0] εQ

} Eisenstein, *Mathematische Abhandlungen* a.1847 p.217:

« Die τ-fache Reihe

$$\Sigma \frac{1}{\{m_1^2+m_2^2+m_3^2+\ldots+m_\tau^2\}^\mu}$$

in welcher alle indices $m_1, m_2, m_3, \ldots m_\tau$ alle ganze Werthe von $-\infty$ bis ∞ durchlaufen mit Ausschluss der einen Combination

$$m_1=0,\ m_2=0,\ \ldots\ m_\tau=0,$$

convergirt, wenn $\mu > {}^1/_2\tau$ ist » {

cont ✻ 30. $m,n\varepsilon N_1$. $u\varepsilon$ Cls'q_n . u ⊃ δu .⊃. §cont P·0-·1

·2 l'mod$u$ εQ . $u = \delta u$. $f\varepsilon$ (q_mfu)cont .⊃. ∃ ι max mod f'u

·3 Hp·2 .⊃. λ f'u = f'u

·4 ∃ (q_n f q)cont ∩ f∋(f'q = q_n)

} MA. a.1890 t.37 p.132 ; Hilbert a.1891 MA. t.38 p.459 ; Moore AmericanT. a.1900 p.72 {

D ✻ 31. $k\varepsilon$ Cls'q . k ⊃ δk . $n\varepsilon N_1$. $f\varepsilon$ q_nfk . $x\varepsilon k$.⊃. §D P1

✻ 32. $k\varepsilon$ Cls'q . k ⊃ δk . $n\varepsilon N_1$. u,v,Du,Dv ε q_nFk . $a\varepsilon$q .⊃.

·1 D($u+v$) = Du + Dv ·2 Dau = aDu

·3 0-ε u'k .⊃. D mod u = Σ(u_r×Du_r |r, 1···n) /mod u

✻ 33·1 $a,b\varepsilon$q . a-=b . $n\varepsilon N_1$. f, Df ε q_nf a⁻b .⊃.

($fb-fa$)/($b-a$) ε Med Df'(a⁻b)

34.✻1

$a,b\varepsilon$q . a-=b . $m,n\varepsilon N_1$. $f\varepsilon$ q_nFa⁻b . $x\varepsilon$ a⁻b . D$^m fx$ εq .⊃. §D P8

·2 Hp·1 . $m\varepsilon N_1$. D$^m f$ ε q_nF a⁻b . $h\varepsilon$ a⁻b−x .⊃. $f(x+h)$ − Σ[(h^r/r! D$^r fx$) |r, 0···($m-1$)] ε h^m/m! Med D$^m f$'(x+ θh)

✻ 35·1 $n\varepsilon N_1$. $f\varepsilon$ q_nf(q_n:q)cont . $a\varepsilon$ q_n . $b\varepsilon$q .⊃.

∃(c,g)∋[$c\varepsilon$ b+Q . $g\varepsilon$ q_nf(b⁻c) . gb=a : $t\varepsilon$ b⁻c .⊃$_t$. D(g, b⁻c, t) = f(gt, t)]

L'équation D(g,b⁻c,t) = f(gt,t) représente un système de n équations différentielles, réduit à forme normale. Cauchy, *Exercices* a.1840 p.327, a démontré l'existence de la fonction g, en supposant la continuité des dérivées de f; Lipschitz BD. a.1876 p.149 a remplacé cette condition par

une autre moins restrictive. Nous avons supprimé cette condition, et donné la démonstration symbolique de la P·1, et d'autres semblables, dans « Démonstration de l'intégrabilité des équations différentielles ordinaires », MA. a.1890 t.37 p. 182. Voir aussi TorinoA. a.1886, AnnN. a.1892 p.289, Enciclopädie t.2 p.195.

S ✻ 40. $a,b\varepsilon\mathrm{q} \,.\, a<b \,.\, n\varepsilon N_1 \,.\, f\varepsilon\, \mathrm{q}_n \mathrm{f} a\overline{\ }b \,.\, \mathrm{l'mod} f`a\overline{\ }b\ \varepsilon\mathrm{q} \;.\supset.$
§S P1·0 2·43·5 3·01·12·22·32·42

✻ 41. $n\varepsilon N_1 \,.\, x\varepsilon\mathrm{q}_n\mathrm{f}\Theta \,.\, S(x,\Theta)\ \varepsilon\mathrm{q}_n \;.\supset.\; \mathrm{mod}\, S(x,\Theta) \leqq S(\mathrm{mod}\, x, \Theta)$
§S 11·12 12 . 20 . 21.

✻ 42·0 $n\varepsilon N_1 \;.\supset.\; \Theta_n = \Theta\, \mathrm{F}(1\cdots n)$ Df

·1 $m,n\varepsilon N_1 \,.\, f\varepsilon\, \mathrm{q}_m \mathrm{F} \mathrm{q}_n \,.\, \mathrm{l'mod}[\mathrm{q}_n \frown x\ni(fx -= 0)]\ \varepsilon Q \;.\supset.$
$Sf = \iota\, \mathrm{q}_m \frown z\ni\{h\varepsilon Q \;.\supset_h.\; z\varepsilon\, h^n \Sigma[\mathrm{Med} f`[h(p+\Theta_n)] \,|\, p, \mathrm{nF}\, 1\cdots n]\}$ Df

·2 $u\varepsilon\, \mathrm{Cls'q}_n \,.\, \mathrm{l'mod} u\ \varepsilon Q \,.\, f\varepsilon\, \mathrm{q}_m \mathrm{f} u \;.\supset.$
$S(f,u) = S\, \iota\, (\mathrm{q}_m \mathrm{F} \mathrm{q}_n) \frown g\ni(x\varepsilon u \;.\supset_x.\; gx = fx : x\varepsilon\, \mathrm{q}_n - u \;.\supset_x.\; gx = 0)$
Df

P·1. Soient m et n des nombres entiers, et f un nombre complexe d'ordre m fonction d'un nombre complexe d'ordre n; c'est-à-dire considérons l'ensemble de m fonctions de n variables. Supposons encore que pour des valeurs suffisamment grandes des variables, la fonction soit constamment nulle. Alors pour avoir l'intégrale de f, indiquée par Sf, fixons une quantité positive h, arbitrairement petite, et divisons l'espace à n dimensions en cubes de coté h. Un sommet d'un cube aura pour coordonnées une suite p de nombres entiers multipliés par h. L'ensemble des points de ce cube sera représenté par $(p+\Theta_n)h$, où Θ_n indique le complexe d'ordre n dont toutes les coordonnées sont des Θ. Formons la somme des valeurs moyennes (Med) de la fonction dans tous les cubes, et multiplions-la par h^n, volume du cube. S'il y a une et une seule valeur z appartenant à toutes ces sommes, z sera dite l'intégrale cherchée.

P·2. Soit u une classe de q_n, limitée ; et soit f une fonction définie dans cette classe. Par $S(f,u)$, intégrale de f étendue à l'ensemble u, on indique l'intégrale de la fonction g définie pour toutes les valeurs des variables, qui dans l'ensemble u coïncide avec f, et au dehors de u est nulle.

Nous n'avons pas la possibilité d'analyser ici la très vaste théorie des intégrales multiples.

§81 Dtrm = (déterminant)

↾ Σ *Π* Num sgn q ❋ 1·0 $m \varepsilon N_1 . u \varepsilon (1\cdots m F 1\cdots m)$sim .⊃.
sgn$u$ = (−1)↾ Num[$(x;y) \ni (x,y \varepsilon 1\cdots m . x<y . ux > uy)$] Df

·01 $m \varepsilon N_1 . u,v \varepsilon (1\cdots m F 1\cdots m)$sim .⊃. sgn uv = (sgn$u$)×(sgn$v$)

Soit u une correspondance réciproque ou permutation des nombres $1\cdots m$; sgn$u$ indique l'unité positive ou négative, selon que le nombre des couples $(x;y)$ qui forment inversion, est pair ou impair.

·1 $m \varepsilon N_1 . a \varepsilon$ qF$(1\cdots m \,\dot{:}\, 1\cdots m)$.⊃.
Dtrm$a$ = Σ{ sgn$u$ *Π*[$a(r, u_r)$ |r, $1\cdots m$] |u, $(1\cdots m F 1\cdots m)$sim } Df

{ Leibniz a.1678 MathS. t.7 p.5:
« Inveni Canonem pro tollendis incognitis quoteunque aequationes non nisi simplici gradu ingredientibus... Fiant omnes combinationes possibiles literarum coefficientium, ita ut nunquam concurrant plures coefficientes ejusdem incognitae et ejusdem aequationis. Hae combinationes affectae signis, ut mox sequetur, componantur simul... Lex signorum haec est. Uni ex combinationibus assignetur signum pro arbitrio, et caeterae combinationes quae ab hac differunt coefficientibus duabus, quatuor, sex etc., habebunt signum oppositum ipsius signo; quae vero ab hac differunt coefficientibus tribus, quinque, septem etc., habebunt signum idem cum ipsius signo» . }

Note. Soit m un nombre, et soit a une lettre, qui munie de deux indices entiers compris entre 1 et m, représente une quantité.

Plusieurs A. écrivent les valeurs de a sur m lignes horizontales composées de m éléments, et appellent « matrice » cette figure carrée.

Soit u une permutation des nombres $1\cdots m$; considérons le produit des valeurs $a(r, u_r)$, où r varie de 1 à m; multiplions-le par sgn$u$, c'est-à-dire par l'unité positive ou négative, selon que la permutation u a un nombre pair ou impair d'inversions. La somme de tous ces produits, lorsque l'on remplace u par toutes les permutations des nombres de 1 à m, s'appelle « le déterminant des a », que nous abrégeons en Dtrm$a$.

Quelques A. appellent « déterminant » la matrice; alors Dtrm$a$ est dite « la valeur du déterminant ».

Voici quelques noms d'usage commun:

Elément (r,s) du déterminant a = $a_{r,s}$.

Ligne (Zeile) s-ième = $a_{r,s}|r$. Colonne r-ième = $a_{r,s}|s$.

Terme principal = *Π* $a_{r,r}|r$, $1\cdots n$).

$a\varepsilon$ déterminant symétrique .=: $r,s \varepsilon 1\cdots n$.⊃. $a_{r,s} = a_{s,r}$.

» » hémisymétrique .=: $r,s \varepsilon 1\cdots n$.⊃. $a_{r,s} = -a_{s,r}$.

» gauche, skew, schife .=: $r,s \varepsilon 1\cdots n . r -= s$.⊃. »

·11 Hp·1 .⊃. Dtrm[$a(r,s)$ |(s,r)] = Dtrm$a$

Hp·1 . uε ·2 (1⋯m F 1⋯m)sim .⊃.
Dtrm $a(r, u_s)$ |(r,s) = sgn$u$ × Dtrm$a$

·3 nεN$_1$. u,vε Cls'N$_1$. Num$u$ = Num$v$ = n . aε qf(u:v) .⊃.
Dtrm(a, u:v) = Dtrm{a(min$_r u$, min$_s v$) |(r,s), 1⋯n:1⋯n} Df

·4 Hp·1 . rε 1⋯n .⊃.
Dtrm$a$ = Σ[$(-1)^{r+s} a_{r,s}$ Dtrm(a, 1⋯n −ιr : 1⋯n −ιs) |s, 1⋯n]
{ CRAMER a.1750 p.656 }

·5 Hp·1 . uε Cls'1⋯n . ∃u .⊃.
Dtrm$a$ = Σ{ (−1)↑(Σu + Σv) × Dtrm(a, u:v) × Dtrm(a, 1⋯n −u : 1⋯n −v) |v, (Cls'1⋯n) ∩ vɜ(Num$v$ = Num$u$)}
{ LAPLACE ParisM. a.1772 p.267 }

Dtrm(a, u:v), qui figure dans la P·5 est dit « subdéterminant, déterminant partiel, … ».

·6 Hp·1 .⊃. Dtrm[$(-1)^{r+s}$ Dtrm(a, 1⋯m −ιr : 1⋯m −ιs) |(r,s), 1⋯m : 1⋯m] = (Dtrm$a$)↑(m−1)
{ CAUCHY JP. a.1812 p.82 }

* 2·1 a,bε qF(1⋯m : 1⋯m) .⊃.
Dtrm$a$ × Dtrm$b$ = Dtrm{Σ($a_{r,t} b_{s,t}$ |t, 1⋯m) |(r,s), 1⋯m : 1⋯m]}

·2 m,nεN$_1$. m>n . a,bε qf(1⋯m : 1⋯n) .⊃.
Dtrm[Σ($a_{r,t} b_{s,t}$ |t, 1⋯m) |(r,s), 1⋯n:1⋯n] =
Σ{Dtrm(a, v : 1⋯n) × Dtrm(b,v : 1⋯n) |v, (Cls'1⋯m) ∩ vɜ(Num$v$ = n)}
{ BINET a.1813 p.287 :

« … Avec des x',x'',x''', &c., y',y'',y''', &c., z',z'',z''', &c., ayant formé $n \frac{n-1}{2} \frac{n-2}{3}$ résultantes à trois lettres, et aussi d'autres résultantes avec des ξ, v, ζ, semblablement accentués, on trouve que la somme des produits des résultantes correspondantes…

$$\Sigma(x,y',z'')(\xi,v',\zeta'') = \Sigma x\xi\Sigma yv\Sigma z\zeta + \Sigma y\xi\Sigma zv\Sigma x\zeta + \Sigma z\xi\Sigma xv\Sigma y\zeta$$
$$- \Sigma x\xi\Sigma yv\Sigma z\zeta - \Sigma y\xi\Sigma xv\Sigma z\zeta - \Sigma z\xi\Sigma yv\Sigma x\zeta$$

Ce dernier membre est de la forme (x,y',z''); on en peut donc conclure que le produit d'un nombre quelconque de fonctions, telles que $\Sigma(x,y',z'')(\xi,v',\zeta'')$ est de la forme (x,y',z''). »}

·3 m,nεN$_1$. m<n . a,bε qf (1⋯m : 1⋯n) .⊃.
Dtrm[Σ($a_{r,t} b_{s,t}$ |t, 1⋯m) |(r,s), 1⋯n :1⋯n] = 0

✻ 3·1 $m\varepsilon N_1+1 . a\varepsilon$ qf $1\cdots m$.Ɔ.
$\text{Dtrm}[a_r^{m-s}|(r,s), 1\cdots m : 1\cdots m] = \Pi\{\Pi[(a_r-a_s)|s, 1\cdots(r-1)]|r, 2\cdots m\}$
{ VANDERMONDE ParisM. a.1772 p.518 ; CAUCHY a.1821 p.426 }

·2 $m\varepsilon N_1+1$.Ɔ. $\text{Dtrm}[r^s|(r,s), 1\cdots m : 1\cdots m] = \Pi(r! \,|r, 1\cdots m)$

·3 Hp·1 .Ɔ. $\text{Dtrm}\{[\Sigma(a, N_1 \frown r/N_1 \frown s/N_1)]\,|(r,s), 1\cdots m : 1\cdots m\}$
$= \Pi(a, 1\cdots m)$ { MANSION *CorrN.* t.4 a.1878 p.109 }

Dvr mlt Φ ✻ 4. $m\varepsilon N_1+1$.Ɔ.

·1 $\text{Dtrm}(\text{Dvr}, 1\cdots m : 1\cdots m) = \Pi(\Phi, 1\cdots m)$
———————— $= m!\,\Pi\{(1-/p)\upharpoonright E(m/p)\,|p, \text{Np} \frown 1\cdots m\}$

{ SMITH a.1876 t.2 p.161 :
« Let (m,n) denote the greatest common divisor of the integral numbers m and n; and let $\psi(m)$ be the number of numbers not surpassing m and prime to m; the symmetrical determinant...
$\Sigma\pm(1,1)\,(2,2)\ldots(m,m)$
is equal to $\psi 1 \times \psi 2 \times \ldots \times \psi(m)$. » }

·2 $\text{Dtrm}\{\text{mlt}, 1\cdots m : 1\cdots m\} = m!\,\Pi\{[(1-p)\upharpoonright E(m/p)]\,|p, \text{Np}\frown 1\cdots m\}$
{ SMITH a.1876 t.2 p.163 }

lim ✻ 6. $a\varepsilon$ qf $(N_1 : N_1)$.Ɔ.

·0 $\text{Dtrm}(a, N_1{:}N_1) = \lim \text{Dtrm}(a, 1\cdots n : 1\cdots n)\,|n$ Df

·1 $\Pi(\text{mod}\, a_{r,r}\,|r, N_1)\,\varepsilon Q \,.\, \Sigma[\text{mod}\, a, (N_1{:}N_1)\frown(r,s)\ni(r -= s)]\,\varepsilon Q$.Ɔ.
$\text{Dtrm}(a, N_1{:}N_1)\,\varepsilon q$ { KOCH AM. t.15 p.53, t.16 p.217 }

D ✻ 7·1 $a,b\varepsilon q \,.\, a<b \,.\, f,g,h,\text{D}f,\text{D}g,\text{D}h\ \varepsilon\ \text{qF}a\text{⊢}b$.Ɔ.
$\exists\ a\text{⌐}b \frown x\ni\{\text{Dtrm}[(\text{D}fx,\text{D}gx,\text{D}hx), (fa,ga,ha), (fb,gb,hb)] = 0\}$
[$k = \text{Dtm}[(fx, gx, hx), (fa, ga, ha), (fb, gb, hb)]\,|x$.Ɔ.
$ka = kb = 0$. §D P4·3 .Ɔ. P]

Continuation : §Subst 5 . §q′ 8.

§82 lin Subst Sb

$+ \times q_n$ cont ✻ 1. $m,n,p \varepsilon N_1 . \supset \therefore$ ·0 $f \varepsilon (q_m F q_n)\mathrm{lin} .=:$
$f \varepsilon (q_m F q_n)\mathrm{cont} : x,y \varepsilon q_n . \supset_{x,y} . f(x+y) = fx+fy$ Df

P1·0. Nous dirons que f est un complexe d'ordre m, fonction linéaire des complexes d'ordre n, si la fonction de la somme est la somme des fonctions correspondantes. Nous ajoutons la condition que la fonction soit continue pour en déduire la P1·19.

Les fonctions linéaires s'appellent aussi distributives.

Nous définissons (P·2) la somme de deux fonctions linéaires, qui est une fonction de la même espèce.

Le produit (P·3) des fonctions a été déjà défini dans §f. Il a nécessairement les propriétés distributive et associative, mais non la commutative.

$f,g,h \varepsilon (q_m F q_n)\mathrm{lin} . x,y \varepsilon q_n . \supset .$ ·1 $f(x+y) = fx+fy$

·11 $f0 = 0$ [$P{\cdot}1 . y=0 . \supset . f(x+0) = fx + f0 . \supset . P$]

·12 $k \varepsilon N_1 . u \varepsilon q_n F 1 \cdots k . \supset . f\Sigma u = \Sigma fu$ [$P{\cdot}1 \supset P$]

·13 $k \varepsilon N_1 . \supset . f(kx) = kfx$ [$P{\cdot}12 . u = x\iota x F 1 \cdots k . \supset . P$]

·14 $f{-}x = -fx$ [$(-x)|y\, P{\cdot}1 . P{\cdot}11 . \supset . 0 = fx + f{-}x . \supset . P$]

·15 $k \varepsilon n . \supset . fkx = kfx$ [$P{\cdot}13 . P{\cdot}14 . \supset . P$]

·16 $k \varepsilon N_1 . \supset . f(x/k) = (fx)/k$ [$(x/k)|x\,]P{\cdot}13 . \supset . P$]

·17 $k \varepsilon N_1 . l \varepsilon n . \supset . f(l/k)x = (l/k)fx$ [$P{\cdot}15 . P{\cdot}16 . \supset . P$]

·18 $k \varepsilon r . \supset . fkx = kfx$ [$= P{\cdot}17$]

·19 $k \varepsilon q . \supset .$ ———— [$\mathrm{Hp} . \supset . f\varepsilon (q_m F q_n)\mathrm{cont} . \supset .$
$fkx = \lim[f(lx)|l, r, k] = \lim(lfx|l, r, k) = kfx$]

·2 $f+g = (fx+gx)|x$ Df ·21 $f+g \ \varepsilon (q_m F q_n)\mathrm{lin}$
[$\mathrm{Hp} . x,y \varepsilon q_n . \supset . (f+g)(x+y) = f(x+y) + g(x+y) = fx+fy+gx+gy$
$= fx+gx+fy+gy = (f+g)x + (f+g)y$]

·22 $f+g = g+f$ ·23 $(f+g)+h = f+(g+h) = f+g+h$

$f,f' \varepsilon (q_m F q_n)\mathrm{lin} . g,g' \varepsilon (q_p F q_m)\mathrm{lin} . k \varepsilon q . \supset .$ ·3 $gf \ \varepsilon (q_p F q_n)\mathrm{lin}$
[$\mathrm{Hp} . x,y \varepsilon q_n . \S f\, P2{\cdot}2 . \supset . gf(x+y) = g[f(x+y)] = g(fx+fy) = g(fx)+$
$g(fy) = (gf)x + (gf)y$]

·31 $g(f+f') = gf+gf' \ . \ (g+g')f = gf+g'f$

·4 $k = (k\times, q_n)$ Df ·41 $k \varepsilon (q_n F q_n)\mathrm{lin}$ ·42 $fk = kf$

La multiplication par un nombre réel est une fonction linéaire.

·5 $fx = \Sigma\{[f\,\mathrm{unit}(n,r)]x_r \,|\, r, 1 \cdots n\}$

$*$ 2·0 $n \varepsilon N_1 \,.\supset.\, \text{Subst}\, q_n = (q_n F q_n)\text{lin}$ Df

P2·0. Nous appelons « Substitution des q_n », abrégé en « Subst q_n » tout q_n fonction linéaire des q_n. Nous définissons le module d'une substitution, et (P6) l'exponentielle d'une substitution.

Les substitutions ont une grande importance dans plusieurs théories. Une exposition moins sommaire est contenue dans mon « Calcolo geometrico » a.1888 p.141-170. Ici elles ont principalement pour but d'introduire les nombres imaginaires.

$n \varepsilon N_1 \,.\, a,b,c \varepsilon \text{Subst}\, q_n \,.\, k \varepsilon q \,.\, x,y \varepsilon q_n \,.\supset.$

·1 $a(x+y) = ax+ay \,.\, a+b \,\varepsilon\, \text{Subst}\, q_n \,.\, (a+b)x = ax+bx$

·2 $a+b = b+a \,.\, a+(b+c) = (a+b)+c = a+b+c$

·3 $(ab)x = a(bx) \,.\, ab \,\varepsilon\, \text{Subst}\, q_n$

·4 $a(b+c) = ab+ac \,.\, (a+b)c = ac+bc \,.\, (ab)c = a(bc) = abc$

·5 $m \varepsilon N_1 \,.\supset.\, a^m \,\varepsilon\, \text{Subst}\, q_n$

mod $*$ 3. $n \varepsilon N_1 \,.\, a,b \varepsilon \text{Subst}\, q_n \,.\, x \varepsilon q_n \,.\, k \varepsilon Q \,.\supset.$

·0 $\text{mod} a = \max\{ [(\text{mod}\, ax)/(\text{mod} x)] \,|x\, `(q_n - \iota 0) \}$ Df

·1 $\text{mod} a \,\varepsilon Q_0$

$[x \varepsilon q_n - \iota 0 \,.\, y = x/\text{mod} x \,.\supset.$

$y \varepsilon q_n \,.\, \text{mod} y = 1 \,.\, (\text{mod}\, ax)/\text{mod} x = (\text{mod}\, ay)/\text{mod} y$ (1)

$(1) \,.\supset.\, (\text{mod}\, ax)/\text{mod} x \,|x\, `(q_n - \iota 0) = (\text{mod}\, ax)/\text{mod} x \,|x\, `[q_n \cap y \ni (\text{mod} y = 1)]$ (2)

$[(\text{mod}\, ax)/\text{mod} x] \,|x \;\varepsilon\; Q_0 f[q_n \cap y \ni (\text{mod} y = 1)]\text{cont}$ (3)

$(3) \,.\, \S\text{cont P1·3} \,.\, (2) \,.\, \text{P·0} \,.\supset.\, \text{P} \,]$

·11 $\text{mod}\, ax \leqq \text{mod} a\; \text{mod} x$ [P·0 . P·1 .Ɔ. P]

·12 $\text{mod} a = 0 \,.=.\, a = 0$

·2 $\text{mod}(a+b) \leqq \text{mod} a + \text{mod} b$

$[\,\text{Hp} \,.\, x \varepsilon q_n \,.\, \text{P2·1} \,.\supset.\, \text{mod}\,(a+b)x = \text{mod}(ax+bx)$

$\text{------} \,.\, \S q_n\, \text{P3·2} \,.\supset.\, \text{-------} \leqq \text{mod}\, ax + \text{mod}\, bx$

$\text{------} \,.\, \text{P·11} \,.\supset.\, \text{-------} \leqq \text{mod} a\; \text{mod} x + \text{mod} b\; \text{mod} x$

$\leqq (\text{mod} a + \text{mod} b)\text{mod} x$ (1)

$\text{Hp} \,.\, (1) \,.\supset\colon x \varepsilon q_n \,.\supset.\, [\text{mod}\,(a+b)x]/\text{mod} x \leqq \text{mod} a + \text{mod} b$ (2)

$(2) \,.\, \text{P·0} \,.\supset.\, \text{P} \,]$

·21 $\text{mod}(ka) = k\, \text{mod} a$

·3 $\text{mod}(ab) \leqq \text{mod} a\; \text{mod} b$

$[\,\text{Hp} \,.\, x \varepsilon q_n \,.\, \text{P·1} \,.\supset.$

$\text{mod}[(ab)x] = \text{mod}[a(bx)] \leqq \text{mod} a\; \text{mod}\, bx \leqq \text{mod} a\; \text{mod} b\; \text{mod} x$

$\text{Hp} : x \varepsilon q_n \,.\supset.\, [\text{mod}\,(ab)x]/\text{mod} x \leqq \text{mod} a\; \text{mod} b : \text{P·0} :\supset.\, \text{P} \,]$

·4 $m \varepsilon N_1 \,.\supset.\, \text{mod}(a^m) \leqq (\text{mod} a)^m$ [P·3 .Ɔ. P]

Sb ❋ 4. $n \varepsilon N_1 . u, v \varepsilon \mathrm{qF}(1 \cdots n : 1 \cdots n) . \supset .$

·0 $\mathrm{Sb}u = \{ [[\Sigma(u_{r,s} x_s | s, 1 \cdots n] | r, 1 \cdots n] | x, q_n \}$ Df

Soit u une matrice carrée d'ordre n. Par $\mathrm{Sb}u$ (substitution déterminée par la matrice u) nous indiquons l'opération qui, à un complexe x d'ordre n, fait correspondre le nombre complexe dont l'élément de rang s est la fonction linéaire $\Sigma(a_{r,s} x_r | r, 1 \cdots n)$ des éléments de x.

·1. $\mathrm{Sb}u$ est une Subst. ·4. Toute Subst est représentée par une matrice.

·01 $x \varepsilon q_n . \supset . (\mathrm{Sb}u)x = \{ [\Sigma(u_{r,s} x_s | s, 1 \cdots n)] | r, 1 \cdots n \}$

·1 $\mathrm{Sb}u \; \varepsilon \; \mathrm{Subst} \; q_n$

·2 $\mathrm{Sb}u + \mathrm{Sb}v = \mathrm{Sb}(u+v)$

·3 $(\mathrm{Sb}v)(\mathrm{Sb}u) = \mathrm{Sb} [\Sigma(v_{rq} u_{qs} | q, 1 \cdots n) | (r,s), 1 \cdots n : 1 \cdots n]$

·4 $a \varepsilon \mathrm{Subst} \; q_n . \supset . a = \mathrm{Sb} \{ [a \, \mathrm{unit}(n,s)]_r | (r,s), 1 \cdots n : 1 \cdots n \}$

Dtrm ❋ 5. $n \varepsilon N_1 . a, b \varepsilon \mathrm{Subst} \; q_n . u \varepsilon \mathrm{qF}(1 \cdots n : 1 \cdots n) . \supset .$

·0 $\mathrm{Dtrm}a = \mathrm{Dtrm} \{ [a \, \mathrm{unit}(n,s)]_r | (r,s), 1 \cdots n : 1 \cdots n \}$ Df

·01 $\mathrm{Dtrm}a \neq 0 . \supset . a \varepsilon (q_n \mathrm{F} q_n)\mathrm{rep}$

·02 $x \varepsilon q_n - \iota 0 . ax = 0 . \supset . \mathrm{Dtrm}a = 0$

·03 $\mathrm{Dtrm}a = 0 . = . \exists \; q_n - \iota 0 \cap x \ni (ax = 0)$

$\mathrm{Dtrm}a = 0 . = .$ a est un diviseur de 0 (Teiler der Null, selon Weierstrass).

·04 $h \varepsilon q . x \varepsilon q_n - \iota 0 . ax = hx . \supset . \mathrm{Dtrm}(a - h) = 0$

·1 $\mathrm{Dtrm}(ab) = \mathrm{Dtrm}a \; \mathrm{Dtrm}b$

·11 $m \varepsilon N_1 . \supset . \mathrm{Dtrm}(a^m) = (\mathrm{Dtrm}a)^m$

·2 $\mathrm{Dtrm}a \neq 0 . \supset . a^{-1} = /a = \iota \, \mathrm{Subst} q_n \cap z \ni (az = 1)$ Df

·3 $\mathrm{Dtrm} \, \mathrm{Sb}u = \mathrm{Dtrm}u$

·4 $(\mathrm{Sb}u)^{-1} =$

$\mathrm{Sb} \{ (-1)^{r+s} \mathrm{Dtrm} [u, 1 \cdots n - \iota r : 1 \cdots n - \iota s] | (r,s), 1 \cdots n : 1 \cdots n \} / \mathrm{Dtrm} \, u$

·5 $x, y \varepsilon q_n \mathrm{F} 1 \cdots n . \mathrm{Dtrm}x \neq 0 . \supset .$

$y/x = \iota \, \mathrm{Subst} \; z \ni [r \varepsilon 1 \cdots n . \supset_r . z(xr) = yr]$ Df

{ Ex. : §vet P60 }

·6 $n \varepsilon N_1 . u \varepsilon \mathrm{qF}(1 \cdots n : 1 \cdots n) . \mathrm{Dtrm} \, u \neq 0 . y \varepsilon q_n . \supset :$

$x \varepsilon q_n . (\mathrm{Sb}u)x = y . = . x = (\mathrm{Sb}u)^{-1} y$

lim ❋ 6·0 $a \varepsilon (\mathrm{Subst} q_n) \mathrm{f} N_0 . \supset .$

$\lim a = \iota \, (\mathrm{Subst} q_n) \cap b \ni [x \varepsilon q_n . \supset_x . \lim(ax) = bx]$ Df

·1 $u \varepsilon \mathrm{qf}(1 \cdots n : 1 \cdots n : N_0) . \supset .$

$\lim \{ \mathrm{Sb} [u(r,s,t) | (r,s), 1 \cdots n : 1 \cdots n] \} | t =$

$\mathrm{Sb} \{ [\lim u(r,s,t) | t] | (r,s), 1 \cdots n : 1 \cdots n \}$

e ✻ 7. $n \varepsilon N_1 . a,b \varepsilon$ Substq_n .⊃.

·0 $e^a = \Sigma[(a^n/n!) | n, N_0]$ Df

·1 $e^a \varepsilon$ Subst q_n

[Hp . P3·4 . $r\varepsilon N_1$.⊃. $\text{mod}(a^r / r!) \leqq (\text{mod} a)^r / r!$ (1)

Hp . §c P2·1 .⊃. $\Sigma[(\text{mod} a)^r / r! | r, N_0] \varepsilon Q$ (2)

Hp . (1) . (2) .⊃. $\Sigma[\text{mod}(a^r / r!) | r, N_0] \varepsilon Q$ (3)

Hp . (3) . §q_n 25·1 .⊃. $\Sigma[(a^r / r!) | r, N_0] \varepsilon$ Subst q_n (4)

(4) . P·0 .⊃. P]

·2 $ab = ba$.⊃. $e^{a+b} = e^a e^b$. $b e^a = e^a b$

D ✻ 11. (Subst q_n | q_n) §q_n P31

✻ 12. $k \varepsilon$ Cls'q . $\delta k = k$. $u, v, Du, Dv \varepsilon$ (Subst q_n)Fk . $a \varepsilon$q .⊃.

·1-·2 = §q_n P32·1-·2 ·3 $D(uv) = uDv + (Du)v$

·4 Dtrm$u$ −=0 .⊃. $D u^{-1} = -u^{-1}(Du)u^{-1}$

✻ 13.

·1 $a \varepsilon$ Subst q_n .⊃. $\Sigma\{a^r D^r[\text{Dtrm}(a-h) | h, q, 0]/r! | r, 0\cdots n\} = 0$

} Cayley LondonT. a.1858 ; Papers t.2 p.475 {

Dem : Laguerre JP. t.25 a.1867 p.215, Frobenius JfM. t.84 a.1878 p.1, Berlin Ber. a.1896 p.601.

L'équation algébrique à laquelle satisfait la Subst a est dite " l'équation caractéristique ", " latent équation de Sylvester ".

·2 $u \varepsilon$ qF$(1\cdots n ; 1\cdots n)$: $r,s \varepsilon 0\cdots n$.⊃$_{r,s}$. $u_{r,s} = u_{s,r}$:⊃.

∃ (q f $1\cdots n$) ∩ $x \ni$} $h \varepsilon$q .⊃$_h$. Dtrm(Sb$u - h$) $= \Pi[(x_r - h) | r, 1\cdots n]$

} Lagrange BerlinM. a.1773 p.108, pour $n = 3$; Cauchy *Exerc.* a.1829 t.4 p.140 {

Le déterminant (tableau) u qui satisfait à Hp·2 est dit « symétrique ». L'équation Dtrm(Sb$u - h$) = 0 est dite « l'équation séculaire ».

✻ 14·1 $a \varepsilon$ Subst q_n . $x \varepsilon$q .⊃. $D(e^{ax} | x, q, x) = a e^{ax}$

·2 $a \varepsilon$ Subst q_n . $x \varepsilon q_n$ Fq . $Dx = ax$. $t \varepsilon$q .⊃. $xt = (x0)e^{\frown}(at)$

L'équation $Dx = ax$ représente le système de n équations différentielles linéaires homogènes à coefficients constants.

La P·2 exprime la fonction (intégrale) x.

S ✻ 15·1 $u \varepsilon$ (Substq_n Fq)cont . $a \varepsilon$q .⊃: $x \varepsilon q_n$ Fq . $Dx = ux$. $x0 = a$.=. $x = \Sigma[\{[S(ur, \Theta z) | z] | r\}^r | r, N_0] a$

Cette formule donne le développement en série toujours convergente de l'intégrale d'un système d'équations différentielles linéaires à coefficients variables. Voir TorinoA. a.1887, MA. a.1888 t.32 p.450, TorinoA. a.1897, Encyclopädie t.2 p.199.

§83 i = (unité imaginaire) q′ = (nombre imaginaire)

Sb ❋ 1·0 $\mathrm{i} = \mathrm{Sb}[(0, -1), (1, 0)]$ Df

·1 $x,y \varepsilon \mathrm{q} \; .\supset. \; \mathrm{i}(x,y) = (-y, x)$ ·2 $\mathrm{i} \; \varepsilon \; \mathrm{Subst} \; \mathrm{q}_2$

·3 $\mathrm{i}^2 = -1$ { Bombelli a.1579 p.169:

« più di meno [$\sqrt{-1}$] via [×] più di meno [$\sqrt{-1}$] fa meno [$=-1$] ».

·4 $\mathrm{mod}\, \mathrm{i} = 1$ ·5 $\mathrm{Dtrm}\, \mathrm{i} = 1$

❋ 2·0 $\mathrm{q}' = \mathrm{q} + \mathrm{i}\mathrm{q}$ Df

$x,y,x',y' \varepsilon \mathrm{q} \,.\, a,b,c \varepsilon \mathrm{q}' \; .\supset.$ ·1 $x + \mathrm{i}y \; \varepsilon \; \mathrm{q}'$

·2 $x + \mathrm{i}y = x' + \mathrm{i}y' \; .=. \; x = x' \,.\, y = y'$

[$x + \mathrm{i}y = x' + \mathrm{i}y' \; .\supset. \; x - x' = \mathrm{i}(y' - y) \; .\supset. \; (x - x')^2 = -(y' - y)^2 \; .\supset.$
$(x - x')^2 + (y - y')^2 = 0 \; .\supset. \; x = x' \,.\, y = y'$]

·3 $(x \pm \mathrm{i}y) + (x' \pm \mathrm{i}y') = (x \pm x') + \mathrm{i}(y \pm y')$

·31 $a + b \; \varepsilon \; \mathrm{q}' \,.\, a + b = b + a \,.\, a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c$

·4 $(x + \mathrm{i}y)(x' + \mathrm{i}y') = (xx' - yy') + \mathrm{i}(xy' + x'y)$

·41 $ab \; \varepsilon \mathrm{q}' \,.\, ab = ba \,.\, a(b + c) = ab + ac \,.\, a(bc) = (ab)c = abc$

·42 $ab = 0 \; .=. \; a = 0 \; .\cup. \; b = 0$

[$x,y,x',y' \varepsilon \mathrm{q} \; .\supset. \; (x + \mathrm{i}y)(x' + \mathrm{i}y') = 0 \; .=. \; xx' - yy' = 0 \,.\, xy' + x'y = 0 \; .=.$
$(xx' - yy')^2 + (xy' + x'y)^2 = 0 \; .=. \; (x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2) = 0 \; .=. \; x^2 + y^2 = 0 \; .\cup.$
$x'^2 + y'^2 = 0 \; .=. \; x = 0 \,.\, y = 0 \; .\cup. \; x' = 0 \,.\, y' = 0$]

·43 (q′ | n) §× P8

·5 $x^2 + y^2 -= 0 \; .\supset. \; /(x + \mathrm{i}y) = (x - \mathrm{i}y)/(x^2 + y^2)$

·51 (q′ | r) §/ P40

·6 $m \varepsilon \mathrm{N}_1 \; .\supset. \; a^m \, \varepsilon \mathrm{q}'$ ·61 (q′ | n) §↑ P11-14

Note. Nous définissons l'unité imaginaire comme la substitution représentée par la matrice $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

L'unité imaginaire, « più di meno » de Bombelli, a été indiquée d'abord par $\sqrt{-1}$, et ensuite par i (Euler dans un Mémoire présenté à PetrA. a.1777 et publié dans Calc. Integr. a.1794 t.4 p.184).

Les q′ sont de la forme $x + \mathrm{i}y$, où $x,y \varepsilon \mathrm{q}$. Ils s'appellent en général « nombres imaginaires », et se présentent dans les calculs comme des substitutions des q_2. Gauss a.1831 a changé le nom en « nombres complexes » ; mais il ne faut pas les confondre avec les q_2, que nous lisons « nombres complexes d'ordre 2 ».

En effet nous multiplions les substitutions, tandis que nous ne multiplions pas les nombres complexes. Un nombre imaginaire est déterminé et détermine un couple de nombres réels, mais il ne coïncide pas avec ce couple.

Cela résulte aussi de l'interprétation géométrique des complexes et des

imaginaires. Les vecteurs se comportent exactement comme des nombres complexes. Voir §vct 11·7. Les produits intérieur et extérieur des vecteurs ne sont pas des vecteurs.

L'unité imaginaire se comporte comme un Rotor, §vct 60·0, cas particulier des quaternions, qui sont des opérations.

Les A., qui considèrent les q' comme des couples de nombres réels, prennent comme Df de =, +, × les P2·2·3·4. Alors la Df du × se présente comme artificieuse (Encyclopädie, p.151) et ces définitions ne sont pas indépendantes, car des ·3 et ·4 on déduit la ·2, comme résulte de la Dm. qui l'accompagne.

Contre la façon d'introduire les imaginaires pour satisfaire à une question impossible, et qu'on rencontre aussi quelques fois pour les nombres négatifs et les fractionnaires, Gauss a.1799 t.3 p.6 a dit :

« Quodsi quis dicat, triangulum rectilineum aequilaterum rectangulum impossibile esse, nemo erit qui neget. At si tale triangulum impossibile tanquam novum triangulorum genus contemplari, aliasque triangulorum proprietates ad illud applicare voluerit, ecquis risum teneat? Hoc esset verbis ludere seu potius abuti..... »

real imag conj ✻ 3. $x,y\varepsilon q . a,b\varepsilon q' .\supset.$

·0 $\text{real}\, a = \iota\, q \frown x\ni(a-x\ \varepsilon\ iq)$ Df

$\text{imag}\, a = \iota\, q \frown y\ni(a-iy\ \varepsilon\ q)$ Df

$\text{conj}\, a = \text{real}\, a - i\ \text{imag}\, a$ Df

Le signe « real » se rencontre dans Weierstrass sous la forme R ; dans les quaternions de Hamilton il a la forme S = (scalar).

Ex. : 4·5 6·5 16·1 §sin 1·0.

" imag " = " le coefficient de la partie imaginaire ".

" conj " = " conjugué " (Cauchy a.1821).

·1 $\text{real}(x+iy) = x\ .\ \text{imag}(x+iy) = y\ .\ \text{conj}(x+iy) = x-iy$

·2 $a = \text{real}a + i\ \text{imag}a$

$\text{real}a = (a+\text{conj}a)/2\ .\ \text{imag}a = (a-\text{conj}a)/(2i)$

·3 $\text{real}(a+b) = \text{real}a+\text{real}b\ .\ \text{imag}(a+b) = \text{imag}a+\text{imag}b$

$\text{conj}(a+b) = \text{conj}a+\text{conj}b$

·4 $\text{real}\ ia = -\text{imag}a\ .\ \text{imag}\ ia = \text{real}a\ .\ \text{conj}\ ia = -i\ \text{conj}a$

·5 $\text{conj}\ /a = /\text{conj}a$ ·9 $m\varepsilon N_1 .\supset.\ \text{conj}\ a^m = (\text{conj}a)^m$

$\sqrt{}\ \sqrt{}^*$ ✻ 4. $a\varepsilon q' . m,n\varepsilon N_1 .\supset.$ ·0 $^m\sqrt{}^*a = q' \frown x\ni(x^m = a)$ Df

$^m\sqrt{}^*a$, qu'il faut décomposer en $(^m\sqrt{}^*)a$, indique l'ensemble des racines m-ièmes de a; $^m\sqrt{}a$ indique la « racine principale », celle qui a la plus grande partie réelle.

·1 $^m\sqrt{}^*0 = \iota 0$ ·2 $a -= 0 .\supset.\ \text{Num}\,^m\sqrt{}^*a = m$

·3 $x\varepsilon\,^m\sqrt{}^*a .\supset.\ ^m\sqrt{}^*a = x \times\,^m\sqrt{}^*1$

·4 $x,y\,\varepsilon\,{}^m\surd^*1 \;.\supset.\; x\times y, x/y, x^n, x^{-n}, \text{conj}\,x\;\varepsilon\;{}^m\surd^*1$

Continuation §√ P3·2

·5 $a\,{-}\varepsilon\,{-}Q \;.\supset.\; {}^m\surd a = \iota({}^m\surd^*a)\frown x\ni(\text{real}\,x = \max \text{real}\,{}^m\surd^*a)$ Df

·6 $x\varepsilon q\,.\,y\varepsilon Q \;.\supset.$

$\surd(x+iy) = \surd\{[\surd(x^2+y^2)+x]/2\} + i\surd\{[\surd(x^2+y^2)-x]/2\}$.

$\surd(x-iy) = $ ——————— i ———————

Σ Π ✻ 5. (q' | r) §Σ P1 . 6 . §√ P1 . 5 . §! P2 . 6·31 7 . 8 . 9

·1 $n\varepsilon N_1\,.\,a\varepsilon\, q'f(1\cdots n) \;.\supset.\; \exists\, q'\frown x\ni[x^n + \Sigma(a_r x^{n-r}|r, 1\cdots n) = 0]$

·2 $\text{Hp}\cdot1 \;.\supset.\; \exists(q'f1\cdots n)\frown z\ni\{x\varepsilon q' \;.\supset_x.\; x^n+\Sigma(a_r x^{n-r}|r, 1\cdots n) = \Pi[(x-z_r)|r, 1\cdots n]\}$ } Girard a.1629 fol. E3 :

« Toutes les equations d'algebre reçoivent autant de solutions, que la denomination de la plus haute quantité le demonstre ». {

Sur la bibliographie de cette P voir Loria RdM. a.1891 t.1 p.185, t.2 p.37.

mod ✻ 6. Hp P3 $.\supset.$ ·1 $\text{mod}(x+iy) = \surd(x^2+y^2)$

·11 $\text{mod}\,ab = \text{mod}\,a\;\text{mod}\,b$

[$x,y,x',y'\,\varepsilon\, q \;.\supset.\; \text{mod}[(x+iy)(x'+iy')] = \text{mod}[xx'-yy'+i(xy'+x'y)] = \surd[(xx'-yy')^2+(xy'+x'y)^2] = \surd[(x^2+y^2)(x'^2+y'^2)] = \text{mod}(x+iy)\times\text{mod}(x'+iy')$]

·2 $m\varepsilon N_1 \;.\supset.\; \text{mod}(a^m) = (\text{mod}\,a)^m$

·3 $\text{mod}\,a = \surd[(\text{real}\,a)^2+(\text{imag}\,a)^2] = \surd(a\times\text{conj}\,a)$ Dfp

$\text{mod}\,a = 1 \;.\supset.\; \text{conj}\,a = /a$

Lm lim ✻ 10.

·1 $u\varepsilon\, q'fN_0\,.\,a\varepsilon q'\,.\,\Sigma(u_n a^n|n, N_0)\,\varepsilon q'\,.\,x\varepsilon q'\,.\,\text{mod}\,x < \text{mod}\,a \;.\supset.$ $\Sigma(u_n x^n|n, N_0)\,\varepsilon q'$ } Abel t.1 p.223 {

·2 $u\varepsilon\, q'fN_0\,.\,a\varepsilon q'\,.\,\infty\,{-}\varepsilon\,\text{Lm}(\text{mod}\,u_n a^n|n)\,.\,x\varepsilon q'\,.\,\text{mod}\,x < \text{mod}\,a \;.\supset.$ $\Sigma(u_n x^n|n, N_0)\,\varepsilon q'$

On appelle : rayon de convergence de la série $\Sigma(u_n a^n|n, N_0)$ $= l'\text{mod}\, q'\frown a\ni[\Sigma(u_n a^n|n, N_0)\,\varepsilon\, q]$

cercle de convergence $= q'\frown x\ni(\text{mod}\,x <$ rayon de convergence) .

·3 $u\varepsilon\, q'{-}(\iota{-}1)\,FN_0\,.\,\Sigma\text{mod}\,u\,\varepsilon\, Q \;.\supset.\; \Pi[(1+u_r)|r, N_0]\,\varepsilon\, q'{-}\iota0$ } Weierstrass a.1856 t.1 p.176 {

·4 $u\varepsilon\, q'fN_0\,.\,a\varepsilon q'\,.\,\Sigma(u_n a^n|n, N_0)\,\varepsilon q' \;.\supset.$
$\lim[\Sigma(u_n x^n|n, N_0)|x, \theta a, a] = \Sigma(u_n a^n|n, N_0)$ } Abel t.1 p.223 {

·5 $a,b\varepsilon q\,.\,\text{real}\,a < \text{real}\,b\,.\,b\,{-}\varepsilon\,{-}N_0 \;.\supset.\; \Pi[(a+r)/(b+r)|r, N_0] = 0$

D ✻ 11-13 (q' | q) §D P1-3

e ✻ 14. $x,y\varepsilon q\,.\,a,b\varepsilon q'\,.\,m\varepsilon n \;.\supset.$

·1 $e^{a+b} = e^a e^b$ ·2 $e^{-a} = /e^a$ $(e^a)^m = e^{ma}$

·3 $\text{mod}\,e^a = e\uparrow(\text{real}\,a)$ ·4 $\text{mod}\,e^{ix} = 1$. $\text{conj}\,e^{ix} = e^{-ix}$

* 15·1 $x \varepsilon q' .\supset. D(e^x|x, q', x) = e^x$

·2 $x \varepsilon q .\supset. D(e^{ix}|x, q, x) = ie^{ix}$

—— . $n \varepsilon N_1 .\supset. D^n(e^{ix}|x, q, x) = i^n e^{ix}$

* 16·1 $a \varepsilon q' . \text{real}\, a > 0 .\supset. S(e^{-ax}|x, Q) = /a$

Dtrm 20·1 $n \varepsilon N_1 . a \varepsilon qF\, 0 \cdots n .\supset.$

$\text{Dtrm}\{a[\text{rest}(r+s, n)] \,|(r;s), (0 \cdots n \,;\, 0 \cdots n)\} =$

$\Pi\{\Sigma(a_r x^r|r, 0 \cdots n)|x, {}^{n+1}\sqrt{*1}\}$

{ J. W. Glaisher a.1879 QJ. t.16 p.31 }

Le déterminant (tableau) qui figure dans cette P est dit « circulant ».

* 21·0 $k = Sb[(1, 0), (0, -1)]$ Df

$x, y \varepsilon q .\supset. k(x, y) = (x, -y)$ $\quad k \varepsilon \text{Subst}\, q_2$

$k^2 = 1$ $\quad \text{mod}\, k = 1$ $\quad \text{Dtrm}\, k = -1$

·1 $i\,k = -k\,i$ $\quad (i\,k)^2 = 1$

$w, x, y, z, w', x', y', z', p, q, r, s \varepsilon q . a, b \varepsilon \text{Subst}\, q_2 .\supset:$

·2 $w + xi + yk + zik = Sb[(w-y, x+z), (z-x, w-y)]$

$Sb[(p, q), (r, s)] = [(p+s) + (q-r)i + (p-s)k + (q-r)ik] / 2$

$\text{Subst}\, q_2 = q + qi + qk + qik$

$w + xi + yk + zik = w' + x'i + y'k + z'ik .=. w = w' . x = x' .$
$y = y' . z = z'$

·3 $\text{real}\, a = \imath\, q \frown w \ni (a - w\, \varepsilon\, qi + qk + qik)$ Df

$\text{real}\, a = (a - iai + kak + ikaik)/4$

$a = \text{real}\, a - i\, \text{real}(ia) + k\, \text{real}(ka) + ik\, \text{real}(ika)$

$\text{real}(w + xi + yk + zik) = w$ $\quad \text{real}(a+b) = \text{real}\, a + \text{real}\, b$

$\text{real}(wa) = w\, \text{real}\, a$ $\quad \text{real}(ab) = \text{real}(ba)$

·4 $\text{Dtrm}(w + xi + yk + zik) = w^2 + x^2 - y^2 - z^2$

$a^2 - 2a(\text{real}\, a) + \text{Dtrm}\, a = 0$

$\text{Dtrm}(e \curvearrowright a) = e \curvearrowright (2\, \text{real}\, a)$

·5 $e^{kx} = (e^x + e^{-x})/2 + k(e^x - e^{-x})/2$

La substitution k ne figure plus dans la suite. Ces formules sont exposées, sous forme géométrique dans " *Trasformazioni lineari dei Vettori d'un piano*, TorinoA. a.1895 ".

Toute Subst des q_2 est une combinaison linéaire des 4 Subst : 1, i, k, ik.

Le Subst de la forme q+qi sont les nombres imaginaires, q' ; elles s'appellent aussi " similitudes directes ".

(q+qi)k = " similitude inverse "

qi+qk+qik = " involution "

q +qk+qik = " dilatation "

$e \curvearrowright (iq)$ = " rotation " $\quad ke \curvearrowright (iq)$ = " symétrie ".

§84 π

e i ✻ 1·0 $\pi = \min[\mathrm{Q} \frown x \ni (e^{ix} = -1)]$ Df

Le nombre π se présenta d'abord comme rapport de la circonférence au diamètre. Ce signe, introduit par J o n e s, adopté par Euler, est dévenu ensuite d'usage commun. Il est la lettre initiale du mot *περίμετρος*.

·1 $\pi/4 \,\varepsilon\, (8/9)^2 - 2\theta X^{-2}$ } AHMÈS a.—2000 :

N.41. « 9 diamètre du cercle . 9/9 = 1 . 9 — 1 = 8 . 8 · 8 = 64 aire du cercle ».

N.42. « 10 diamètre . 10/9 = 1+/9 . 10 − (1+/9) = 8+2/3+/6+/18 .

(8+2/3+/6+/18)² = 79+/108+/324 aire ». {

·2 $3 + 1/7 > \pi > 3 + 10/71$

} ARCHIMEDES, *Dimensio circuli* P3:

Παντὸς κύκλου ἡ περίμετρος τῆς διαμέτρου τριπλασίων ἐστί, καὶ ἔτι ὑπερέχει ἐλάσσονι μὲν ἢ ἑβδόμῳ μέρει τῆς διαμέτρου, μείζονι δὲ ἢ δέκα ἑβδομηκοστομόνοις. {

·3 $\pi \,\varepsilon\, 3 + 8 \times 60^{-1} + 30 \times 60^{-2} - \theta\, 60^{-2}$ } PTOLEMAEUS t.1 p.512 :

...τοῦ λόγου τῶν περιμέτρων πρὸς τὰς διαμέτρους ὄντος, ὃ ἔχει τὰ γ̄ η̄ λ̄ πρὸς τὸ ἕν. {

·4 $\pi \,\varepsilon\, 62832/20000 - \theta X^{-4}$ } ARYABHATA p.399:

« Ajoutez 4 à 100, multipliez par 8, ajoutez encore 62000, voilà pour un diamètre de deux myriades (ayutâs) la valeur approximative de la circonférence du cercle » {

·5 $377/120 > \pi > 333/106$

} A. ANTHONISZ, voir BM. a.1888 p.36; a.1889 p.84 {

$\pi \,\varepsilon\, 355/113 - \theta X^{-5}$ } A. METIUS a.1625 p.88 {

·6 $\pi \,\varepsilon\, \mathrm{Q} - \mathrm{R}$ } LAMBERT *BerlinM.* a.1768 p.265-322 {

·7 $\pi^2 - \varepsilon \mathrm{R}$ } LEGENDRE *Géométrie* a.1794 note 4 {

·81 $\pi \,\varepsilon\, \sqrt{(1+\sqrt{6})} + \sqrt{(9-3\sqrt{6})} - \theta X^{-3}$ } MASCHERONI a.1798 p.248 {

·82 $\pi \,\varepsilon\, 9/5 + 3/\sqrt{5} - \theta X^{-4}$ } VIETA a.1593 Opera p.393 {

·83 $\pi \,\varepsilon\, \sqrt{(40/3 - 2\sqrt{3})} + 7\theta X^{-5}$ } KOCHANSKI AErud. a.1685 p.398 {

·84 $\pi \,\varepsilon\, (13\sqrt{146})/50 + \theta X^{-6}$ } SPECHT JfM. a.1828 t.3 p.83 {

·85 $\pi \,\varepsilon\, (501 + 80\sqrt{10})/240 - \theta X^{-7}$

} GERGONNE Ann. a.1817 t.8 p.252 {

Note. — Les P·83 ·84 donnent des constructions géométriques assez simples pour π en observant que :

$\sqrt{(40/3 - 2\sqrt{3})} = \sqrt{[4 + (3 - /\sqrt{3})^2]}$; $(13\sqrt{146})/50 = 13/10 \sqrt{[1 + (11/5)^2]}$.

·9 $n \varepsilon \mathrm{N}_1 \,.\, x \varepsilon \mathrm{rf}\, 1 \cdots n \;.\!\supset\!.\; \pi^n + \Sigma(x_r \pi^{n-r} | r, 1 \cdots n) \;-\!\!= 0$

{ LINDEMANN a 1882 MA. t.20 p.213;
cfr. GORDAN a.1893 MA. t.43 p.222 }

$\pi = 3\cdot$

14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510
58209 74944 59230 78164 06286 20899 86280 34825 34211 70679
82148 08651 32823 06647 09384 46095 50582 23172 53594 08128
48111 74502 84102 70193 85211 05559 64462 29489 54930 38196
44288 10975 66593 34461 28475 64823 37867 83165 27120 19091
45648 56692 34603 48610 45432 66482 13393 60726 02491 41273
72458 70066 06315 58817 48815 20920 96282 92540 91715 36436
78925 90360 01133 05305 48820 46652 13841 46951 94151 16094
33057 27036 57595 91953 09218 61173 81932 61179 31051 18548
07446 23799 62749 56735 18857 52724 89122 79381 83011 94912
98336 73362 44065 66430 86021 39501 60924 48077 23094 36285
53096 62027 55693 97986 95022 24749 96206 07497 03041 23668
86199 51100 89202 38377 02131 41694 11902 98858 25446 81639
79990 46597 00081 70029 63123 77381 34208 41307 91451 18398
05709 85 . . .

Note. Le nombre π a été déterminé par

Vieta *Canon mathematicus*, Lutetiæ, a.1579 p.15	avec	9	décimaux	
Adrianus Romanus *Ideæ Math.*, Anvers, a.1613	»	15	»	»
Ludolphus a Ceulen (*de Cologne*) a.1615 p.144	»	32	»	»
Grienberger, *Elementa Trigonometrica*, Romæ a.1630	»	39	»	»
Sharp a.1699 (publié par H. Sherwin, *Mathematical tables* a.1705 p.59)	»	71	»	»
Machin, (publié par Jones, *Synopsis Palmariorum Matheseos* a.1706 p.243, qui le désigna par la lettre π)	»	100	»	»
Lagny, *Hist. de l'Acad. des Sc. de Paris*, a.1719 p.144	»	112	»	»
Vega, *Thesaurus Logarithmorum*, a.1794 p.633	»	136	»	»
Thibaut, *Grundriss der reinen Math.*, 4. éd. a.1822 p.312	»	156	»	»
Dahse a. 1840; JfM. a.1844 t.27. p.198	»	200	»	»
Clausen a.1847 (publié par Schuhmacher, *Astronomische Nachrichten* t.25 col.207)	»	248	»	»
Richter, *Archives Math. de Grunert*, a.1853, t.21, p.119	»	330	»	»
Rutherford, LondonP. a.1853	»	440	»	»
Shanks, » » » » »	»	530	»	»
» » » » » a.1874, t. 23, p.45	»	707	»	»

π = !! · ..!..!.. ..!!!!!! .!!.!.!.

Le calcul de π en base 2, proposé plusieurs fois par Leibniz (Opera a.1768 t.3 p.521, 547,...), executé par Jacob Bernoulli, a été publié sous forme inintelligible (a.1705, Leibniz MathS. t.3 p.97).

✱ 2·1 $e^{2\pi i} = 1 \qquad e^{\pi i} = -1 \qquad e^{\pi i/2} = i$

$e^{\pi i/3} = (1+i\sqrt{}3)/2 \qquad e^{\pi i/4} = (1+i)/\sqrt{}2$

$e^{\pi i/5} = [1+\sqrt{}5+i\sqrt{}(10-2\sqrt{}5)]/4 \qquad e^{\pi i/6} = (\sqrt{}3+i)/2$

$e^{\pi i/8} = [\sqrt{}(2+\sqrt{}2)+i\sqrt{}(2-\sqrt{}2)]/2$

$e^{\pi i/10} = [\sqrt{}(10+2\sqrt{}5)+i(\sqrt{}5-1)]/4$

$e^{\pi i/12} = [\sqrt{}6+\sqrt{}2+i(\sqrt{}6-\sqrt{}2)]/4$

$e^{\pi i/15} = e^{\pi i/6} \times e^{-\pi i/10}$

$= \{\sqrt{}(30+6\sqrt{}5)+\sqrt{}5-1+i[\sqrt{}(10+2\sqrt{}5)+\sqrt{}3-\sqrt{}15]\}/8$

$e^{\pi i/16} = \{\sqrt{}[2+\sqrt{}(2+\sqrt{}2)]+i\sqrt{}[2-\sqrt{}(2+\sqrt{}2)]\}/2$

La construction des polygones réguliers, correspondant aux formules précédentes, se rencontre dans Euclide IV P6-16.

$e^{\pi i/17} = \{[15+\sqrt{}17+\sqrt{}(34-2\sqrt{}17)+2\sqrt{}[17+3\sqrt{}17-\sqrt{}(170+38\sqrt{}17)]]$
$+4i\sqrt{}[34-2\sqrt{}17-2\sqrt{}(\text{————})-4\sqrt{}[\text{——————————}]]\}/32$

{ GAUSS a.1801 t.1 p.462 }

$e^{\pi i/20} = \{\sqrt{}(3+\sqrt{}5)+\sqrt{}(5-\sqrt{}5)+i[\sqrt{}(3+\sqrt{}5)-\sqrt{}(5-\sqrt{}5)]\}/4$

$e^{\pi i/30} = \{\sqrt{}(18+6\sqrt{}5)+\sqrt{}(10-2\sqrt{}5)+i[\sqrt{}(30-6\sqrt{}5)-\sqrt{}(6+2\sqrt{}5)]\}/8$

$e^{\pi i/60} = \{\sqrt{}(5+\sqrt{}5)+\sqrt{}(9-3\sqrt{}5)+\sqrt{}(15+3\sqrt{}5)-\sqrt{}(3-\sqrt{}5)$
$+i[\quad » \quad » \quad - \quad » \quad » \quad]\}/8$

·2 $n \varepsilon N_1 .\supset. \sqrt[n]{}{}^*1 = [e \upharpoonright (2m\pi i/n)] | m\ \varepsilon\ 0 \cdots (n-1)$

·3 $n \varepsilon N_1 . x \varepsilon q' .\supset. x^n - 1 = \Pi\{[x - e\upharpoonright(2m\pi i/n)] | m, 0\cdots(n-1)\}$
$x^n + 1 = \Pi\{[x - e\upharpoonright[(2m+1)\pi i/n]] | m, 0\cdots(n-1)\}$

{ COTES Rogerus a.1722 p.114 }

lim ✱ 3·1 $\pi = 2/\Pi\{[(\sqrt{}/2+x)|x]^n 0 \,|n,\ N_0\}$

{ VIETA a.1593 Opera p.400 :

« Sit ... diameter 1. Circulus 1N. Erit $\frac{1}{2}$ ad 1N, sicut $\sqrt{\frac{1}{2}}$ ad unitatem adplicatam ad id quod fit ex $\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}}$, in $\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}}}$ ... ». }

·2 $\pi = 2(2/1)\,(2/3)\,(4/3)\,(4/5)\,(6/5)\,(6/7)\ldots$

$= 4\Pi[(1-n^{-2})\,|\,n, 2\mathrm{N}_1+1] = 2/\Pi[(1-n^{-2})\,|\,n, 2\mathrm{N}_1]$

{ WALLIS a.1655 t.1 p.469:

« Dicimus, fractionem illam $\dfrac{3\times3\times5\times5\times7\times7\times \&c.}{2\times4\times4\times6\times6\times8\times \&c.}$ seu $\dfrac{9\times25\times49\times81\ \&c.}{8\times24\times48\times80\ \&c.}$ in infinitum continuatam, esse ipsissimum quaesitum numerum □ præcise ad quem ita se habet 1, ut Circulus ad Quadratum Diametri » {

·3 $\pi/4 = \Sigma\{(-1)^n/(2n+1)\,|\,n, \mathrm{N}_0\}$

{ LEIBNIZ a.1682 MathS. t.5 p.120:

« Quadrato Diametri existente 1,

Circuli aream fore $\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{13}-\dfrac{1}{15}+\dfrac{1}{17}-\dfrac{1}{19}$ etc., nempe quadratum diametri integrum demta (ne nimius fiat valor) ejus tertia parte, addita rursus (quia nimium demsimus) quinta, demtaque iterum (quia nimium re-adjecimus) septima, et ita porro. » {

·4 $\pi^2/6 = \Sigma\,\mathrm{N}_1^{-2}$

{ EULER a.1735 PetrC. t.7 ; voir BM. a.1890 p.24 {

{ Joh. BERNOULLI t.4 p.21 : $\dfrac{cc}{6} = 1+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{16}+$ &c. {

·41 $\pi^4/90 = \Sigma\mathrm{N}_1^{-4}$ ·32 $m\varepsilon\mathrm{N}_1 \,.\!\supset\!.\, \Sigma\mathrm{N}_1^{-2m}\ \varepsilon\,\mathrm{R}\pi^{2m}$

{ Joh. BERNOULLI t.4 p.24 { Continuation: §B·5

·42 $\pi^3/32 = 1-3^{-3}+5^{-3}-\ldots$ $5\pi^5/1536 = 1-3^{-5}+5^{-5}-\ldots$

{ EULER a.1748 p.137 {

·5 $\lim(n!\,n^{-n}\mathrm{e}^n/\sqrt{n})\,|\,n = \sqrt{(2\pi)}$ { STIRLING a.1730 p.137 {

·6 $n\varepsilon\mathrm{N}_1 \,.\!\supset\!.\, \mathrm{C}(2n,n) < 2^{2n}/\sqrt{(n\pi)}$

$> 2^{2n}/\sqrt{[(n+1/2)\pi]}$ { STIRLING id. p.119{

·7 $x\varepsilon\mathrm{q}' \,.\!\supset\!.\, (\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})/2 = x(1+x^2\pi^{-2})(1+x^2 2^{-2}\pi^{-2})\ldots$

——————————— $= x\Pi[(1+x^2\pi^{-2}n^{-2})\,|\,n, \mathrm{N}_1]$

·8 $x\varepsilon\mathrm{q}' \,.\!\supset\!.\, (\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})/2 = (1+4x^2\pi^{-2})(1+4x^2 3^{-2}\pi^{-2})\ldots$

——————————— $= \Pi[(1+4x^2\pi^{-2}n^{-2})\,|\,n, 2\mathrm{N}_0+1]$

{ EULER a.1748 p.119,120 {

Les fonctions considérées dans P·7 et ·8 sont dites fonctions « hyperboliques » et indiquées par Shx, Chx (Riccati a.1757).

·9 $x\varepsilon\,\mathrm{q}-\mathrm{n}\pi \,.\, u\varepsilon(\mathrm{Qf}\,\mathrm{N}_0)\mathrm{decr} \,.\, \lim u = 0 \,.\!\supset\!.\, \Sigma(u_r\mathrm{e}^{rix}\,|\,r, \mathrm{N}_0)\ \varepsilon\mathrm{q}'$

✻ 4. $n \varepsilon \mathrm{N}_1 \,.\, \sigma_n = \Sigma(\mathrm{N}_1 \frown n/\mathrm{N}_1) \,.\supset.$

·1 $\lim\{(\sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_n)/n^2\} \,|n = \pi^2/12$

·2 $\lim\{(\sigma_1/1+\sigma_2/2+\ldots+\sigma_n/n)/n\} \,|n = \pi^2/6$

·3 $\lim\{(\sigma_1/1+\sigma_2/4+\ldots+\sigma_n/n^2)/\log n\} \,|n = \pi^2/6$

·4 $\lim\{(\Phi_1+\Phi_2+\cdots+\Phi_n)/n^2\} \,|n = 3/\pi^2$

·5 $\lim\{(\Phi_1/1+\Phi_2/2+\ldots+\Phi_n/n)/n\} \,|n = 6/\pi^2$

·6 $\lim\{(\Phi_1/1+\Phi_2/4+\ldots+\Phi_n/n^2)/\log n\} \,|n = \pi^2/6$

{ ·1-·6 CESÀRO a.1893 NapoliA. s.2 t.6 N°11 p.15 }

log ✻ 5·0 $x \varepsilon \mathrm{q}' - \iota 0 \,.\supset.\, \log^* x = \mathrm{q}' \frown y \ni (\mathrm{e}^y = x)$ Df

·01 ———————— $\log x = \iota\, (\log^* x) \frown y \ni (-\pi < \mathrm{imag}\, y \leqq \pi)$ Df

$\log^* x$ indique la classe des solutions de l'équation $\mathrm{e}^y = x$.
$\log x$ = « la valeur principale du logarithme », indique la solution dont le coefficient de l'unité imaginaire est compris entre $-\pi$ et $+\pi$.

·02 $\log^* x = \log x + 2\mathrm{n}\pi\mathrm{i}$

·1 $\log \mathrm{i} = \mathrm{i}\pi/2 \,.\, \log(-1) = \pi\mathrm{i}$

{ EULER a.1728 (Voir BM. a.1899 p.46):

« Sit radius circuli a ... habebis quadrans circuli $= \dfrac{aa}{4\sqrt{-1}}\log(-1)$ » }

imag log x est dit " argument, amplitude, azimuth, anomalie,... " de x.

·2 $x \varepsilon \mathrm{q}' \,.\, \mathrm{mod}\, x \leqq 1 \,.\, x -= -1 \,.\supset.\, \log(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 - \ldots$

·3 $-\log(\pi/4) = \Sigma(2\mathrm{N}_1+1)^{-2} + \Sigma(2\mathrm{N}_1+1)^{-4}/2 + \Sigma(2\mathrm{N}_1+1)^{-6}/3 + \ldots$
{ EULER a.1748 p.150 }

·4 $\log(\pi^2/6) = \Sigma\mathrm{Np}^{-2} + \Sigma\mathrm{Np}^{-4}/2 + \Sigma\mathrm{Np}^{-6}/3 + \ldots$
{ EULER a.1748 p.235 }

S ✻ 10.

·1 $\mathrm{S}[\,/(1+x^2)\,|x, \mathrm{q}] = 2\mathrm{S}[$——————$, \mathrm{Q}] = 4\mathrm{S}[$——————$, \Theta] = \pi$

·2 $\mathrm{S}[\,/(1+x+x^2)\,|x, \mathrm{Q}] = \mathrm{S}[\,/(1-x+x^2)\,|x, \Theta] =$
$2\mathrm{S}[$————————$, \Theta] = 2\pi \times 3^{-3/2}$

·21 $a \varepsilon \mathrm{Q} \,.\supset.\, \mathrm{S}[\,/(a^2+x^2)\,|x, \mathrm{q}] = \pi/a$

·22 $p, q \varepsilon \mathrm{q} \,.\, q - p^2/4 > 0 \,.\supset.\, \mathrm{S}[\,/(x^2+px+q)\,|x, \mathrm{q}] = \pi/\sqrt{(q-p^2/4)}$

·23 $a \varepsilon \mathrm{Q} \,.\, b, c \varepsilon \mathrm{q} \,.\, ac - b^2 > 0 \,.\supset.$
$\mathrm{S}[\,/(ax^2+2bx+c)\,|x, \mathrm{q}] = \pi/\sqrt{(ac-b^2)}$

·3 $\mathrm{S}[\,/(1+x^3)\,|x,\,\mathrm{Q}] = \mathrm{S}[x/(1+x^3)\,|x,\,\mathrm{Q}] = 2\pi/(3\surd 3)$

·4 $\mathrm{S}[\,/(1+x^4)\,|x,\,\mathrm{q}] = \mathrm{S}[\,x^2/(1+x^4)\,|x,\,\mathrm{q}] = \pi\surd 2\,/2$

·41 $a,b\varepsilon\mathrm{Q}\,.\supset.\,\mathrm{S}\{\,/[(a^2+x^2)(b^2+x^2)]\,|x,\,\mathrm{q}\} = \pi/[ab(a+b)]$
$[\;\;/[(a^2+x^2)(b^2+x^2)] = [/(a^2+x^2) - /(b^2+x^2)]/(b^2-a^2)\;\;]$

·42 $a,b\varepsilon\mathrm{Q}\,.\supset.\,\mathrm{S}\{x^2/[a^2+x^2)(b^2+x^2)]\,|x,\,\mathrm{q}\} = \pi/(a+b)$
$[\;\;x^2/[(a^2+x^2)(b^2+x^2)] = [b^2/(b^2+x^2) - a^2/(a^2+x^2)]/(b^2-a^2)\;\;]$

·43 $a,b,c\varepsilon\mathrm{Q}\,.\supset.\,\mathrm{S}[\,/(a+bx^2+cx^4)\,|x,\,\mathrm{q}] = \mathrm{S}[x^2/(ax^4+bx^2+c)\,|x,\,\mathrm{q}]$
$= \pi/\surd[ab+2a\surd(ac)]$ { Plana TurinM. a.1820 }

·5 $\mathrm{S}[\,/(1+x^6)\,|x,\,\mathrm{Q}] = 2\mathrm{S}[x^2/(1+x^6)\,|x,\,\mathrm{Q}] = \mathrm{S}[x^4/(1+x^6)\,|x,\,\mathrm{Q}]$
$= \pi/3$

} ·2-·5 Euler *Calc. Int.* a.1768 t.1 §353 t.4 s.4 §105 {

e * 11·1 $\mathrm{S}(\mathrm{e}-x^2\,|x,\,\mathrm{q}) = \mathrm{S}[\,/\surd(-\log x)\,|x,\,\Theta] = \surd\pi$
} Euler PetrA. t.16 p.111 {

·2 $a\varepsilon\mathrm{Q}\,.\supset.\,\mathrm{S}(\mathrm{e}-ax^2|x,\,\mathrm{q}) = \surd(\pi/a)$

·3 $m\varepsilon\,\mathrm{n}\text{-}\iota 0\,.\supset.\,\mathrm{S}[\mathrm{e}^{m\mathrm{i}x}\,|x,\,0 \,\text{⊢}\, 2\pi] = 0$

·4 $\mathrm{S}\{[\log(1+x)]/(1+x^2)\,|x,\,\Theta\} = (\pi/8)\log 2$
} Bertrand JdM. t.8 a.1843 p.112 {

* 12·1 $a,b\varepsilon\,\mathrm{q'f}\,\mathrm{N}_0\,.\,\Sigma(\mathrm{mod}a,\,\mathrm{N}_0)\,,\,\Sigma(\mathrm{mod}b,\,\mathrm{N}_0)\;\varepsilon\mathrm{Q}\;.\supset.$
$\Sigma(a\times b,\,\mathrm{N}_0) = \mathrm{S}\{\Sigma(a_r\mathrm{e}^{r\mathrm{i}x}|r,\,\mathrm{N}_0)\times\Sigma(b_s\mathrm{e}^{-s\mathrm{i}x}|s,\,\mathrm{N}_0)\,|x,\;2\Theta\pi\}\,/(2\pi)$
} Parseval a.1805 ParisSE. t.1 p.639; IdM. a.1894 p.196 {

$[\;\mathrm{Hp}\;.\supset.\;\mathrm{S}\{[\Sigma(a_r\,\mathrm{e}^{r\mathrm{i}x}\,|r,\,\mathrm{N}_0)\times\Sigma(b_s\;\mathrm{e}^{-s\mathrm{i}x}|s,\,\mathrm{N}_0)]|x,\,2\Theta\pi\}$
$= \mathrm{S}\{\Sigma[a_r\,b_s\,\mathrm{e}^{(r-s)\mathrm{i}x}|(r;s),\,(\mathrm{N}_0;\mathrm{N}_0)]|x,\,2\Theta\pi\}$
$= \Sigma\{a_r\,b_s\,\mathrm{S}[\mathrm{e}^{(r-s)\mathrm{i}x}|x,\,2\Theta\pi]|(r;s),\,(\mathrm{N}_0;\mathrm{N}_0)\} = \Sigma(a_r\,b_r\,2\pi\,|r,\,\mathrm{N}_0)\;]$

§85 sin cos tng $\sin^{-1}$ $\cos^{-1}$ tng^{-1}

$\vdash$ q e i ✻ 1. $x \varepsilon q . \supset .$

·0 $\cos x = cx = \text{real}\, e^{ix}$. $\sin x = sx = \text{imag}\, e^{ix}$ Df

$sx+y = (sx)+y$. $sxy = (sx)y$. $sx^2 = (sx)^2$ Df

$cx = (e^{ix}+e^{-ix})/2$. $sx = (e^{ix}-e^{-ix})/(2i)$ Dfp

$e^{ix} = cx + i\,sx$. $e^{-ix} = cx - i\,sx$

{ Euler a.1748 p.104 }

·1 $s0 = 0$. $c0 = 1$. $s-x = -sx$. $c-x = cx$

·2 $\pi = \min Q \frown x \ni (sx = 0)$ Dfp

$s(\pi - x) = sx$. $s(2\pi + x) = sx$

$c(\pi + x) = -cx$. $c(2\pi + x) = cx$

$cx = s(\pi/2 - x)$. $sx = c(\pi/2 - x)$ Dfp

$sx = 0 .=. x \varepsilon n\pi$: $\cos x = 0 .=. x \varepsilon \pi/2 + n\pi$

$c(\pi/2) = 0$. $s(\pi/2) = 1$

$c(\pi/4) = s(\pi/4) = (\sqrt{2})/2$. $c(\pi/3) = 1/2$ { Voir §π 2·1 }

·3 $x \varepsilon (-\pi/2)\text{—}(\pi/2) . \supset . \log(cx + i\,sx) = ix$

{ Cotes a.1714 LondonT. t.29 p.32 :

« ... si quadrantis circuli quilibet arcus [x], radio CE [1] descriptus sinum habeat CX [$\sin x$], sinumque complementi ad quadrantem XE [$\cos x$]: sumendo radio CE pro Modulo, arcus erit rationis inter EX+XC$\sqrt{-1}$ et CE [$\cos x + i \sin x$] mensura ducta in $\sqrt{-1}$. » }

·4 $cx^2 + sx^2 = 1$

$x \varepsilon \theta\pi/2 . \supset .$ $cx = \sqrt{(1 - sx^2)}$. $sx = \sqrt{(1 - cx^2)}$

$sx = [(-1)^{E(x/\pi)}]\sqrt{[1 - cx^2]}$

$cx = [(-1)^{E(x/\pi + 1/2)}]\sqrt{[1 - sx^2]}$

·5 $-1 \leqq sx \leqq 1$ $-1 \leqq cx \leqq 1$

$x \varepsilon Q . \supset .$ $sx < x$. $cx > 1 - x^2/2$. $sx > x - x^3/6$

·6 $x, y \varepsilon \theta\pi/2 . x > y . \supset . sx/x < sy/y$

{ C. Ptolemæus t.1 p.43:

λέγω γάρ, ὅτι, ἐὰν ἐν κύκλῳ διαχθῶσιν ἄνισοι δύο εὐθεῖαι, ἡ μείζων πρὸς τὴν ἐλάσσονα ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ἐπὶ τῆς μείζονος εὐθείας περιφέρεια πρὸς τὴν ἐπὶ τῆς ἐλάσσονος. }

·7 $n \varepsilon \mathrm{N}_1 . \supset .$

$\mathrm{s}x - \Sigma[(-1)^r x^{2r+1}/(2r+1)! \,|\, r, 0 \cdots n] \;\varepsilon\; (-1)^{n+1}\, \theta\, x^{2n+3}/(2n+3)$

$\mathrm{c}x - \Sigma[(-1)^r x^{2r}/(2r)! \,|\, r, 0 \cdots n] \;\varepsilon\; (-1)^{n+1}\, \theta\, x^{2n+2}/(2n+2)!$

·8 $\mathrm{N}_1 \frown n \ni [\mathrm{c}(2\pi/n) \,\varepsilon\, \mathrm{r}] = \iota 1 \cup \iota 2 \cup \iota 3 \cup \iota 4 \cup \iota 6$ { Hessel a.1831 }

❋ 2·0 $x \varepsilon \mathrm{q} . \mathrm{c}x -= 0 . \supset . \mathrm{tng}x = \mathrm{t}x = \mathrm{s}x/\mathrm{c}x$ Df

·01 $x \varepsilon \mathrm{q} - (2\mathrm{n}+1)\pi/2 . \supset . \mathrm{t}x = (\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} - 1)/[\mathrm{i}(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}+1)]$ Dfp

·04 $x \varepsilon \mathrm{q} - (2\mathrm{n}+1)\pi/2 . \supset . 1 + (\mathrm{t}x)^2 = /(\mathrm{c}x)^2$

·05 $x \varepsilon \theta\pi/2 . \supset . \mathrm{s}x = \mathrm{t}x / \sqrt{(1+\mathrm{t}x^2)} \quad . \quad \mathrm{c}x = / \sqrt{(1+\mathrm{t}x^2)}$

·06 $x \varepsilon \mathrm{q} - (2\mathrm{n}+1)\pi/2 . \supset . \mathrm{s}x = [(-1) \upharpoonright \mathrm{E}(x/\pi + /2)]\mathrm{t}x / \sqrt{(1+\mathrm{t}x^2)}$

$\mathrm{c}x = [(-1) \upharpoonright \mathrm{E}(x/\pi)] / \sqrt{(1+\mathrm{t}x^2)}$

·1 $\mathrm{t}x = 0 .=. x \varepsilon \mathrm{n}\pi \quad . \quad \mathrm{t}\,{-x} = -\mathrm{t}x \quad . \quad \mathrm{t}(\pi + x) = \mathrm{t}x$

$\mathrm{t}0 = 0 \quad . \quad \mathrm{t}(\pi/4) = 1$

·2 $x \varepsilon \mathrm{R} . \supset . \mathrm{t}x -\varepsilon \mathrm{R}$ { Lambert a.1761 p.265 }

·21 $n \varepsilon \mathrm{N}_1 . \mathrm{t}(2\pi/n) \,\varepsilon\, \mathrm{r} . \supset . n \varepsilon \iota 1 \cup \iota 2 \cup \iota 8$

{ Wendt, Monh. a.1899 p.97 }

·3 $x \varepsilon \theta\pi/2 . \supset . \mathrm{t}x > x$

Note.

La fonction « sinus » abrégée en « sin » se présenta d'abord dans les applications astronomiques de la géométrie. Voir §vct P4. Ptolémée a calculé les cordes des arcs de 0° à 180°.

Albategnius (a.880), astronome arabe, a introduit le sinus; il dit en effet: « Ptolémée ne se servait des cordes entières que pour la facilité des démonstrations, mais nous avons pris ces moitiés des cordes des arcs doubles dans toute l'étendue du demi-cercle. »

Le mot arabe est *gib* ou *dgib*, qui signifie un pli; c'est la corde pliée en deux. Le pli d'une robe, en latin, se dit *sinus*. P. ex. selon Virgile (Æneides I.1) Venus se présenta à Énée: « Nuda genu, nodoque sinus collecta fluentes ».

Les traducteurs latins des Arabes on remplacé *gib* par *sinus*, adopté depuis par tous les astronomes.

Voir Delambre, Histoire de l'astronomie du moyen age a.1819 p.12.

Jusqu'à Bernoulli le sinus était appellé « sinus rectus »; « sinus totus » était le rayon. Jusqu'à Legendre, a.1840, les sinus était une longueur; seulement quelquefois il suppose le rayon $=1$.

La définition analytique du sinus est due à Euler; voir P·2.

cos signifie « complementi sinus ». Voir P·21.

Le symbole « tang » a une origine géométrique.

Nous n'introduirons pas les autres fonctions trigonométriques cotang, sec, cosec qu'on remplace par /tng, /cos, /sin. On pourrait même supprimer toutes les fonctions trigonométriques, car elles ne forment qu'un double emploi avec l'exponentielle $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$.

Les abréviations s, c, t ont été introduites par Gudermann dans les fonctions elliptiques.

Dans l'usage commun il n'y a pas un système de conventions constantes pour les parenthèses.

Selon les conventions §+ 10·9, $\sin^2 x$ signifie $\sin(\sin x)$, et non $(\sin x)^2$, qui contrairement à l'usage de plusieurs A. et d'accord avec quelques autres, sera ici indiqué par sx^2.

* 3. $y \varepsilon q . -1 \leqq y \leqq 1 .\supset.$

·0 $\sin^{-1} y = s^{-1} y = \iota\, q \frown x \ni (sx = y . -\pi/2 \leqq x \leqq \pi/2)$ Df

$\cos^{-1} y = c^{-1} y = \iota\, q \frown x \ni (cx = y . 0 \leqq x \leqq \pi)$ Df

·1 $x \varepsilon q . sx = y .=. x \varepsilon (2n\pi + s^{-1} y) \cup (\pi + 2n\pi - s^{-1} y)$

$x \varepsilon q . cx = y .=. x \varepsilon (2n\pi + c^{-1} y) \cup (2n\pi - c^{-1} y)$

·2 $s^{-1} y = -i \log[\sqrt{(1-y^2)} + iy] \quad . \quad c^{-1} y = -i \log[y + i\sqrt{(1-y^2)}]$

·3 $s^{-1} y + c^{-1} y = \pi/2$

·4 $y \varepsilon q .\supset. t^{-1} y = \iota\, q \frown x \ni (tx = y . -\pi/2 < x < \pi/2)$ Df

$x \varepsilon q . tx = y .=. x \varepsilon n\pi + t^{-1} y$

$y \varepsilon Q .\supset. t^{-1} y + t^{-1}/y = \pi/2$

$t^{-1} y = \log[(1+yi)/(1-yi)]/(2i)$ { Euler a.1748 p.105 }

$x \varepsilon Q . y \varepsilon q .\supset. \log(x+iy) = \log\sqrt{(x^2+y^2)} + i\, t^{-1}(y/x)$

Soit y une quantité comprise entre -1 et $+1$; $\sin^{-1} y$ indique la quantité la plus petite en valeur absolue, dont le sinus est y. De même pour $\cos^{-1} y$, qu'on prend entre les limites 0 et π; et $\text{tang}^{-1} y$, qu'on prend entre les limites $-\pi/2$ et $\pi/2$.

Ces fonctions sont inverses de sin, cos, tang; mais puisque nous n'avons pas introduit de symbole pour indiquer l'inversion des fonctions, il faut considérer les symboles $\sin^{-1}$..., comme des signes simples.

La notation que nous adoptons est généralement usitée dans les traités anglais. On trouve aussi les notations arc sin$y$, arc(sin $= y$).

Eulër, MiscBerol. a.1743 t.7 p.167, a adopté les notations : sinAx Asin$x$, au lieu de : sin$x$, $\sin^{-1} x$; où A est la lettre initiale de Arc.

* 4. $x, y, z, t \varepsilon q .\supset.$

·1 $s(x-y)\, s(z-t) + s(y-z)\, s(x-t) + s(z-x)\, s(y-t) = 0$

{ Ptolemæus t.1 p.36 }

$s(x+y) = sx\, cy + cx\, sy \qquad c(x+y) = cx\, cy - sx\, sy$

» — » — » » — » + »

{ Abû'lwéfa a.998 ; *Journal Asiatique* a.1892 s.8 t.19 p.419 }

$sx + sy = 2\, s[(x+y)/2]\, c[(x-y)/2]$

$cx + cy = 2\, c[(x+y)/2]\, c[(x-y)/2]$

$cx - cy = 2\, s[(x+y)/2]\, s[(y-x)/2]$

·2 $s(2x) = 2\,sx\,cx \;.\; c(2x) = cx^2 - sx^2 = 1 - 2sx^2 = 2cx^2 - 1$
$x \varepsilon\, \Theta\pi \,.\supset.\; c(x/2) = \surd[(1+cx)/2] \;.\; s(x/2) = \surd[(1-cx)/2]$

·3 $s(x/2) = [(-1) \upharpoonleft E\{x/(2\pi)\}]\, \surd[(1-cx)/2]$
$c(x/2) = \{(-1) \upharpoonleft E[x/(2\pi) + /2]\} \surd[(1+cx)/2]$

·4 $x \varepsilon\, \Theta\pi/2 \,.\supset.\; 2c(x/2) = \surd(1+sx) + \surd(1-sx)$
» $2s(x/2) =$ » $-$ »

$2s(x/2) = \{(-1) \upharpoonleft E[x/(2\pi) + /4]\} \surd(1+sx) - \{(-1) \upharpoonleft E[x/(2\pi) + 3/4)\} \surd(1-sx)$
$2c(x/2) =$ » $+$ »

·5 $m \varepsilon N_0 \,.\supset.\; 2c[\pi/(2\times 2^m)] = [\surd(2+x) | x]^m 0$
$2c[\pi/(3\times 2^m)] =$ » 1
$2c[x/2^m] = [\surd(2+z) | z]^m 2cx$

{ Vieta a.1593 Opera p.400 :

« Sit circuli diameter 2. Latus quadrati ei circumscripti sit $\surd 2$. Apotome lateris octogoni $\sqrt{2+\surd 2}$. Apotome lateris hexdecagoni $\sqrt{2+\sqrt{2+\surd 2}}$. Apotome lateris polygoni triginta duorum laterum $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\surd 2}}}$ ... Et eo concontinuo progressu ». }

·6 $x \varepsilon\, q - (2n+1)\pi/4 \,.\supset.\; t(2x) = 2tx / (1 - tx^2)$

·7 $x, y \varepsilon q \,.\, x, y, x+y, x-y \,-\varepsilon\, (2n+1)\pi/2 \,.\supset.$
$t(x+y) = (tx + ty)/(1 - tx\,ty)$

$x, y \varepsilon q \,.\, x+y \,-\varepsilon\, (2n+1)\pi \,.\, x-y \,-\varepsilon\, n\pi \,.\supset.$
$(sx+sy)/(sx-sy) = t[(x+y)/2] / t[(x-y)/2]$

$x, y \varepsilon\, q - (2n+1)\pi/2 \,.\supset.\; tx + ty = s(x+y)/(cx\,cy)$
$s(2x) = 2tx/(1+tx^2) \;.\; c(2x) = (1-tx^2)/(1+tx^2)$

·8 $x \varepsilon\, \theta\pi \,.\supset.\; t(x/2) = sx/(1+cx) = (1-cx)/sx$
$= [-1 + \surd(1+tx^2)]/tx = \surd[(1-cx)/(1+cx)]$

* 5·1 $x, y \varepsilon q \,.\, \mathrm{mod}(xy) < 1 \,.\supset.\; t^{-1}[(x+y)/(1-xy)] = t^{-1}x + t^{-1}y$

·2 $a \varepsilon N_1 \,.\, x, y \varepsilon N_1 \,.\, xy = a^2+1 \,.\, b = a+x \,.\, c = a+y \,.\supset.$
$t^{-1}/a = t^{-1}/b + t^{-1}/c$

·3 $\pi = 4t^{-1}1 \;.\; \pi = 4(t^{-1}/2 + t^{-1}/3)$ { Euler a.1748 p.107 }

$\pi = 8t^{-1}/3 + 4t^{-1}/7$ { Gauss t.2 p.501 }

[$(/3, /7) | (x,y)$ P·1 $.\supset.\; \mathrm{tng}^{-1}/2 = \mathrm{tng}^{-1}/3 + \mathrm{tng}^{-1}/7$ (1)
(1) . P·3 $.\supset.$ Ths]

$\pi = 8t^{-1}/2 - 4t^{-1}/7$ { Bertrand a.1855 p.301 }

$\pi = 16\,\mathrm{t}^{-1}/5 - 4\,\mathrm{t}^{-1}/239$ } MACHIN a.1705 {

[$(/5, /5) \mid (x,y)\mathrm{P}{\cdot}1 \;.\supset.\; \mathrm{tng}^{-1}5/12 = 2\mathrm{tng}^{-1}/5$ (1)

$[(5/12\,,\, 5/12)] \mid (x,y)\mathrm{P}{\cdot}1 \,.\, (1) \;.\supset.\; \mathrm{tng}^{-1}120/119 = 4\mathrm{tng}^{-1}/5$ (2)

$(120/119\,,\, -1) \mid (x,y)\mathrm{P}{\cdot}1 \;.\supset.\; \mathrm{tng}^{-1}/239 = \mathrm{tng}^{-1}120/119 - \mathrm{tng}^{-1}1$ (3)

$(2) \,.\, (3) \,.\, \mathrm{P}{\cdot}3 \;.\supset.\;$ Ths]

·4 $(m,n,x,y)\ni[m,n\varepsilon\mathrm{n} \,.\, x,y\varepsilon\mathrm{N}_1 \,.\, x<y \,.\, m\,\mathrm{t}^{-1}/x + n\,\mathrm{t}^{-1}/y = \pi/4]$

$= \iota(1,1,2,3) \cup \iota(2,-1,2,7) \cup \iota(2,1,3,7) \cup \iota(4,-1,5,239)$

} STÖRMER BsF. a.1899 t.27 p.170 {

$\pi = 4(\mathrm{t}^{-1}/2 + \mathrm{t}^{-1}/5 + \mathrm{t}^{-1}/8)$ } DAHSE a.1844 p.198 {

$\pi = 20\mathrm{t}^{-1}/7 + 8\mathrm{t}^{-1}3/79$ } VEGA a.1794 p.633 {

* 6. $x,y\varepsilon\mathrm{q} \,.\, m\varepsilon\mathrm{N}_1 \;.\supset.$

·1 $\mathrm{c}(mx) = \mathrm{real}(\mathrm{c}x + \mathrm{i}\,\mathrm{s}x)^m$

$= \Sigma\{(-1)^r \mathrm{C}(m, 2r)(\mathrm{c}x)^{m-2r}(\mathrm{s}x)^{2r} \mid r, 0\cdots\mathrm{E}(m/2)\}$

$\mathrm{s}(mx) = \mathrm{imag}(\mathrm{c}x + \mathrm{i}\,\mathrm{s}x)^m$

$= \Sigma\{(-1)^r \mathrm{C}(m, 2r+1)(\mathrm{c}x)^{m-2r-1}(\mathrm{s}x)^{2r+1} \mid r, 0\cdots\mathrm{E}[(m-1)/2]\}$

} VIETA a.1615 p.11 : « Si fuerint duo triangula quorum angulus acutus primi [x], sit submultiplus ad angulum acutum secundi [mx] …

Ad similitudinem laterum circa rectum … efficitur a base [cos$x$] et perpendiculo [sin$x$] primi ut binomia radice potestas æque-alta [$(\cos x + \sin x)^m$], et singularia facta homogenea distribuuntur in duas partes successive, utrobique primum affirmata, deinde negata, et harum primæ parti similis fit basis secundi [cosmx], perpendiculum [sinmx] reliquæ. » {

·2 $\mathrm{s}(2mx) = \mathrm{c}x\, \Sigma\{(-1)^r 2^{2r+1} \mathrm{C}(m+r, 2r+1)(\mathrm{s}x)^{2r+1} \mid r, 0\cdots m-1\}$

$\mathrm{s}[(2m+1)x] = (2m+1)\Sigma\{[(-1)^r 2^{2r}/(2r+1)]\mathrm{C}(m+r, 2r)(\mathrm{s}x)^{2r+1} \mid r, 0\cdots m\}$

$\mathrm{s}(mx) = \mathrm{s}x\, \Sigma\{(-1)^r \mathrm{C}(m-r-1, r)(2\mathrm{c}x)^{m-2r-1} \mid r, 0\cdots\mathrm{E}[(m-1)/2]\}$

$\mathrm{c}(2mx) = 1 - 2m\Sigma\{[(-1)^r 2^{2r}/(r+1)]\mathrm{C}(m+r, 2r+1)(\mathrm{s}x)^{2r+2} \mid r, 0\cdots m-1\}$

$\mathrm{c}[(2m+1)x] = \mathrm{c}x\, \Sigma\{(-1)^r 2^{2r}\mathrm{C}(m+r, 2r)(\mathrm{s}x)^{2r} \mid r, 0\cdots m\}$

$2\mathrm{c}(mx) = (2\mathrm{c}x)^m - m\Sigma\{[(-1)^r/(r+1)]\mathrm{C}(m-r-2, r)(2\mathrm{c}x)^{m-2r-2} \mid r,$

$0\cdots\mathrm{E}[(m-2)/2]\}$

·3 $y \mathrel{-\varepsilon} 2\mathrm{n}\pi \;.\supset.$

$\Sigma[\mathrm{s}(x+2ry) \mid r, 0\cdots m] = \mathrm{s}(x+my)\, \mathrm{s}[(m+1)y] \,/\, \mathrm{s}y$

$\Sigma[\mathrm{c}(x+2ry) \mid r, 0\cdots m] = \mathrm{c}(x+my)\, \mathrm{s}[(m+1)y] \,/\, \mathrm{s}y$

·4 $x\varepsilon\, \mathrm{q}-\mathrm{n}\pi \;.\supset.$

$2\Sigma[\mathrm{s}(rx)^2 \mid r, 1\cdots m] = m - \mathrm{c}[(m+1)x]\, \mathrm{s}(mx) \,/\, \mathrm{s}x$

$2\Sigma[\mathrm{c}(rx)^2 \mid r, 1\cdots m] = m - 1 + \mathrm{c}(mx)\, \mathrm{s}[(m+1)x] \,/\, \mathrm{s}x$

·5 $m \varepsilon\, 2N_1 . x \varepsilon q .\supset$

$(cx)^m = \Sigma \{C(m,r) c[(m-2r)x] \mid r, 0\cdots(m-2)/2\} /2^{m-1} + C(m,m/2)/2^m$

$(sx)^m = (-1)^m \Sigma \{(-1)^r C(m,r)\, c[(m-2r)x] \mid r, 0\cdots (m-2)/2 \} /2^{m-1}$
$+ C(m,m/2)/2^m$

·6 $m\varepsilon(2N_0+1) . x\varepsilon q .\supset.$

$(cx)^m = \Sigma \{C(m,r) c(m-2r)x \mid r,0\cdots(m-1)/2 \} /2^{m-1}$

$(sx)^m = (-1)^{(m-1)/2} \Sigma \{(-1)^r C(m,r)\, s[(m-2r)x] \mid r,0\cdots(m-1)/2\}/2^{m-1}$

·7 $m\varepsilon N_1 . x\varepsilon q - (2n+1)\pi/2 .\supset. t(mx) =$
$\Sigma\{(-1)^r C(m,2r+1) tx^{2r+1} \mid r,0\cdots E(m/2)\}/\Sigma\{(-1)^r C(m,2r) tx^{2r} \mid r, 0\cdots E(m/2)\}$

{ JOH. BERNOULLI AErud. a.1712 ; Opera t.4 p.113 {

❋ 7. $x\varepsilon q .\supset.$

·1 $sx = x - x^3/3! + x^5/5! - \ldots = \Sigma\{[(-1)^n x^{2n+1}/(2n+1)!] \mid n, N_0\}$
$cx = 1 - x^2/2! + x^4/4! - \ldots = \Sigma\{[(-1)^n x^{2n}/(2n)!] \mid n, N_0\}$
{ NEWTON a.1676 {

·2 $y\varepsilon\Theta .\supset. s^{-1}y = y + 1/(2\times3)\, y^3 + (1\times3)/(2\times4\times5)\, y^5 +$
$(1\times3\times5)/(2\times4\times6\times7)\, y^7 + \ldots$ { NEWTON a.1676 {

·3 $-1 \leqq y \leqq 1 .\supset. t^{-1}y = y - y^3/3 + y^5/5 - \ldots$
{ LEIBNIZ a.1673-74, MathS. t.5 p.401 {
{ J. GREGORIUS *Commercium epistolicum* a.1671 (?) {

·4 $\mathrm{mod}x < 1 . m\varepsilon q .\supset.$
$s(ms^{-1}x) = mx + \Sigma\{m\Pi [[(2r+1)^2 - m^2] \mid r, 0\cdots n] x^{2n+3}/(2n+3)! \mid n, N_1\}$

·5 $\mathrm{Hp}·4 .\supset. c(ms^{-1}x) =$
$1 + \Sigma\{(-1)^{n+1}\ \Pi[(m^2-4r^2) \mid r, 0\cdots n] x^{2n+2}/(2n+2)! \mid n, N_0\}$

❋ 8. $x\varepsilon q .\supset.$

·1 $sx = x\Pi[(1 - x^2 n^{-2}\pi^{-2}) \mid n, N_1]$ { EULER a.1748 p.120{
$cx = \Pi\{[1 - 4x^2 n^{-2}\pi^{-2}] \mid n, 2N_0+1\}$ { EULER a.1748 p.120 {

·2 $-\pi < x < \pi .\supset. x/2 = sx - s(2x)/2 + s(3x)/3 - \ldots$
{ EULER PetrNC. a.1760 t.5 p.204 {

·21 $x\varepsilon\, 2\theta\pi .\supset. sx + s(2x)/2 + s(3x)/3 + \ldots = (\pi - x)/2$
[$(\pi - x)|x$ P·2 $.\supset.$ P]

·22 $x\varepsilon q .\supset. sx + s(2x)/2 + s(3x)/3 + \ldots = (\pi - x)/2 + \pi E[x/(2\pi)]$

·23 $x\varepsilon\, \theta\pi .\supset. sx + s(3x)/3 + s(5x)/5 + \ldots = \pi/4$
{ FOURIER a.1822 p.164 {

·3 $x\varepsilon (-\pi)\,\bar{}\,\pi .\supset. \log[(sx)/x] = -x^2\pi^{-2}\Sigma N_1^{-2} - x^4\pi^{-4}\Sigma N_1^{-4}/4 - \ldots$
$= -\Sigma\{[(x/\pi)^{2n}\, \Sigma N_1^{-2n}/n] \mid n, N_1\}$ { EULER a.1748 p.152 {

·4 $-\pi/2 < x < \pi/2 \,.\supset.\, \log \mathrm{c}x =$
$-\Sigma\{[(x/\pi)^{2n}(2^{2n}-1)\,\Sigma N_1{}^{-2n}/n\,] \,|\, n, N_1\}$ { Euler a.1748 p.152 }

·5 $-\pi/2 < x < \pi/2 \,.\supset.\, \mathrm{t}x = 2\Sigma\{[(2^{2n}-1)\pi^{-2n}\,\Sigma N_1{}^{-2n} x^{2n-1}] \,|\, n, N_1\}$

·6 $-\pi < x < \pi \,.\, x -= 0 \,.\supset.$
$/\mathrm{t}x = /x - 2\Sigma[\,\pi^{-2n} x^{2n-1} \Sigma N_1{}^{-2n} \,|\, n, N_1\,]$

·7 $x \varepsilon\, \mathrm{q} - \mathrm{n} \,.\supset.\, \pi/\,\mathrm{t}(\pi x) = /x + 2x\Sigma[\,/(x^2-n^2) \,|\, n, N_1\,]$
$= \lim[\,\Sigma/(x-r) \,|\, r, -n \cdots n] \,|\, n$ { Euler a.1748 p.159 }

·8 $\pi = 4\Sigma\{\mathrm{t}^{-1}(2n^2) \,|\, n, N_1\}$

✻ 9.

·1 $a \varepsilon (\mathrm{Qf}N_0)\mathrm{decr} \,.\, \lim a = 0 \,.\, x \varepsilon\, \mathrm{q} - 2n\pi \,.\supset.\, \Sigma[a_r \mathrm{c}(rx) \,|\, r, N_1]\, \varepsilon \mathrm{q}$

·2 ———————————— $.\, x \varepsilon \mathrm{q} \,.\supset.\, \Sigma[a_r \mathrm{s}(rx) \,|\, r, N_0]\, \varepsilon \mathrm{q}$

·3 $x \varepsilon\, \mathrm{q} - \mathrm{n}\pi \,.\supset.\, \log[2\mathrm{c}(x/2)] = \mathrm{c}x - \mathrm{c}(2x)/2 + \mathrm{c}(3x)/3 - \ldots$

·4 $r \varepsilon \mathrm{q} \,.\, \mathrm{mod}\, r < 1 \,.\supset.$
$\log \sqrt{(1 + 2r\mathrm{c}x + r^2)} = r\mathrm{c}x - r^2\mathrm{c}(2x)/2 + r^3\mathrm{c}(3x)/3 - \ldots$
{ ·3·4 Abel t.1 p.247 }

·41 $\mathrm{Hp}·4 \,.\supset.\, -\log\sqrt{(1-2r\mathrm{c}x+r^2)} = r\mathrm{c}x + r^2\mathrm{c}(2x)/2 + \ldots$

·5 $x \varepsilon\, \mathrm{q} - \mathrm{n}\pi \,.\supset.\, \log[2\mathrm{s}(x/2)] =$
$-\mathrm{c}x - \mathrm{c}(2x)/2 - \mathrm{c}(3x)/3 - \ldots$ { Abel t.1 p.247 }

·6 $r \varepsilon \mathrm{q} \,.\, \mathrm{mod}\, r < 1 \,.\, x \varepsilon \mathrm{q} \,.\supset.\, \mathrm{t}^{-1}[r\mathrm{s}x/(1+r\mathrm{c}x)] =$
$r\mathrm{s}x - r^2\mathrm{s}(2x)/2 + r^3\mathrm{s}(3x)/3 - \ldots$

[$\mathrm{Hp} \,.\, \S\pi\ \mathrm{P}4·2 \,.\supset.\, \mathrm{t}^{-1}[r\mathrm{s}x/(1+r\mathrm{c}x)] = \mathrm{imag}\log(1+re^{ix}) =$
$\mathrm{imag}(re^{ix} - r^2e^{2ix}/2 + \ldots) = r\mathrm{s}x - r^2\mathrm{s}(2x)/2 + \ldots$]

$\mathrm{t}^{-1}[r\mathrm{s}x/(1-r\mathrm{c}x)] = \Sigma[r^n\mathrm{s}(nx)/n \,|\, n, N_1]$

$(/2)\mathrm{t}^{-1}[(2r\mathrm{s}x)/(1-r^2)] = \Sigma\{r^{2n+1}\mathrm{s}[(2n+1)x]/(2n+1) \,|\, n, N_0\}$

$-(/2)\mathrm{t}^{-1}[(2r\mathrm{c}x)/(1+r^2)] = \Sigma\{(-r)^{2n+1}\mathrm{c}[(2n+1)x]/$ » » }

{ Lobatto, *Recherches sur la sommation de quelques séries trigonométriques*, Delft a.1827 }

✻ 10·1 $p, q \varepsilon \mathrm{q} \,.\, q^2 < p^3 \,.\supset.$
$\mathrm{q} \frown x \ni (x^3 - 3px + 2q = 0) = 2\sqrt{p}\,\mathrm{c}\{[\mathrm{c}^{-1}(q\,p^{-3/2}) + (0 \cdots 2)\pi]/3\}$
{ Vieta Opera a.1615 p.159 }

D ✻ 11.

·1 $x \varepsilon \mathrm{q} \,.\supset.\, \mathrm{D}(\mathrm{s}, \mathrm{q}, x) = \mathrm{c}x \,.\, \mathrm{D}(\mathrm{c}, \mathrm{q}, x) = -\mathrm{s}x$

·2 $x \varepsilon\, \mathrm{q} - \mathrm{n}\pi/2 \,.\supset.$
$\mathrm{D}(\mathrm{tng}, \mathrm{q} - \mathrm{n}\pi/2, x) = /(\cos x)^2 = 1 + (\mathrm{tng}\, x)^2$

·3 $x \varepsilon (-1)^{-}1$.⊃. $D(\sin^{-1}, -1^{-}1, x) = /\sqrt{(1-x^2)}$
» » $D(\cos^{-1}$, » $) = -/\sqrt{(1-x^2)}$

·4 $x\varepsilon q$.⊃. $D(\text{tng}^{-1}, q, x) = /(1+x^2)$

·5 $n\varepsilon N_1 . x\varepsilon q$.⊃. $D^n(\sin, q, x) = \sin(x+n\pi/2)$
———————— $D^n(\cos, q, x) = \cos(x+n\pi/2)$

·6 Hp·5 . $a,b\varepsilon q$.⊃.
$D^n [\sin(ax+b) | x, q, x] = a^n \sin(ax+b+n\pi/2)$

S ✻ 12·1 $m,n\varepsilon n . m^2 -= n^2$.⊃.
$S[\sin(mx)\sin(nx) | x, \Theta\pi] = S[(\cos mx \cos nx) | x, \Theta\pi] = 0$

·11 $m\varepsilon N_1$.⊃. $S[(\cos mx)^2 | x, \Theta\pi] = S[(\sin mx)^2 | x, \Theta\pi] = \pi/2$
[§π 11 .⊃. P]

·2 $m,n\varepsilon Q_0$.⊃. $S[x^m(1-x)^n | x, \Theta] =$
$2S[(\sin x)^{2m+1}(\cos x)^{2n+1} | x, \Theta\pi/2]$

·3 $S[(\sin x)^2 | x, \Theta\pi/2] = \pi/4$

·4 $n\varepsilon N_1$.⊃. $S[(\sin x)^{2n} | x, \Theta\pi/2] = \Pi\{[1-/(2r)] | r, 1\cdots n\}\times\pi/2$

·5 $a,b\varepsilon Q$.⊃. $S\{/[(a\sin x)^2+(b\cos x)^2] | x, \Theta\pi/2\} = \pi/(2ab)$

·6 $a\varepsilon Q . b\varepsilon q . a^2>b^2$.⊃. $S[/(a+b\cos x) | x, \Theta\pi] = \pi/\sqrt{(a^2-b^2)}$

·61 $z\varepsilon\, \theta\pi/2$.⊃. $S[/(1+\cos z \cos x) | x, \Theta\pi] = \pi/\sin z$

·7 $a\varepsilon Q . b,c\varepsilon q . a^2>b^2+c^2$.⊃.
$S[/(a+b\cos x+c\sin x) | x, \Theta 2\pi] = 2\pi/\sqrt{(a^2-b^2-c^2)}$

·8 $z\varepsilon\, \theta\pi$.⊃. $S[/(1-2x\cos z+x^2) | x, \Theta] = \pi/(4\sin z)$
{ Euler *Calc. int.* t.4 s.5 p.46 }

·9 $m,n\varepsilon N_1 . m<n$.⊃. $S[x^{m-1}/(1+x^n) | x, Q] = \pi/[n\sin(m\pi/n)]$

·91 $a\varepsilon\theta$.⊃. $S[x^{a-1}/(1+x) | x, Q] = \pi/(\sin a\pi)$

✻ 13·1 $S\{(\sin x)/x | x, Q\} = S\{(\sin x /x)^2 | x, Q\} = \pi/2$

·2 $S\{\cos x /\sqrt{x} | x, Q\} = S\{\sin x /\sqrt{x} | x, Q\} = 2S[\sin(x^2) | x, Q]$
$= 2S[\cos(x^2) | x, Q] = \sqrt{(\pi/2)}$ { Fresnel a.1818 t.1 p.178 }

Fresnel a aussi calculé une table de la même intégrale entre des limites variables.

·3 $S\{x\sin x/[1+(\cos x)^2] | x, \Theta\pi\} = \pi^2/4$

·4 $a\varepsilon Q . b\varepsilon q$.⊃. $S(e^{-ax}\cos bx | x, Q) = a/(a^2+b^2)$
. $S(e^{-ax}\sin bx | x, Q) = b/(a^2+b^2)$

·5 $S(\log\sin, \Theta\pi/2) = -(\pi\log 2)/2$

✻ 14·1 $a,b\varepsilon Q . E(a,b) = S\{\sqrt{[(a\cos x)^2+(b\sin x)^2]} \mid x, 2\pi\Theta\} .\supset.$
$E(a,b) = 2\pi a\{1-\Sigma[\Pi\{[1-/(2r)]^2 \mid r, 1\cdots n\}(1-b^2/a^2)^n/(2n-1) \mid n, N_1]\}$
$= \pi(a+b)\Sigma\{[C(/2, n)]^2[(a-b)/(a+b)]^{2n} \mid n, N_0\}$
$= \pi(a+b)\{1+[(a-b)/(a+b)]^2/4+[(a-b)/(a+b)]^4/64-\ldots\}$

·2 Hp·1 . $a-=b .\supset. E(a,b) > \pi(a+b)$.
$E(a,b) < \pi(a+b)+\pi(\sqrt{a}-\sqrt{b})/2$
{ KEPLERUS a.1609 t.3 p.401 :
« Tota elliptica circumferentia est proxime medium arithmeticum inter circulum diametri longioris et circulum diametri brevioris ». }

Sur les formules d'approximation pour la rectification de l'ellipse voir CR. a.1889 p.360.

·3 $a,b,c,d\varepsilon Q . 2c = a+b . d^2 = ab .\supset.$
$S\{/\sqrt{[(acx)^2+(bsx)^2]} \mid x, \Theta\pi/2\} = S\{/\sqrt{[(ccx)^2+(dsx)^2]} \mid x, \Theta\pi/2\}$

$\pi/S\{/\sqrt{[(a\,cx)^2+(b\,sx)^2]} \mid x, \Theta\pi/2\}$ est dit, par Gauss t.3 p.360, la « Arithmetisch-geometrisches Mittel » entre a et b. Cette moyenne ne varie pas si l'on remplace a et b par leurs moyennes arithmétique et géométrique.

✻ 15. $a\varepsilon q .\supset.$
·1 $\text{sgn}\,a = 2/\pi\, S\{(\sin ax)/x \mid x, Q\}$

·2 $\text{mod}\,a = 2/\pi\, S\{(\sin ax)^2/x^2 \mid x, Q\}$

·3 $a,b\varepsilon q .\supset. 2S[(\sin ax \sin bx)/x^2 \mid x, Q] = \pi \min(\iota a \cup \iota b)$

✻ 16. $a\varepsilon\, \theta\pi/2 .\supset.$
·1 $S\{(\text{tng}x)^2 \mid x, \Theta a\} = \text{tng}a - a$ ·2 $S\{\text{tng}, \Theta a\} = -\log\cos a$

·3 $S\{/\cos, \Theta a\} = \log\{\text{tng}a + (\cos a)^{-1}\}$
{ ·1-·3 COTES a.1722 p.78-81 }

Continuation : §vct P31-35.

§86 B = (nombres de Bernoulli)

✱ 1·0 $n \varepsilon \mathrm{N}_1 . \supset . \mathrm{B}_n = 2^{1-2n} (2n)! \, \pi^{-2n} \, \Sigma(\mathrm{N}_1{}^{-2n})$ Df

·1 $\mathrm{B}_1 = /6$. $\mathrm{B}_2 = /30$. $\mathrm{B}_3 = /42$. $\mathrm{B}_4 = /30$.

$\mathrm{B}_5 = 5/66$. $\mathrm{B}_6 = 691/2730$. $\mathrm{B}_7 = 7/6$. $\mathrm{B}_8 = 3617/510$.

$\mathrm{B}_9 = 43867 / 798$. $\mathrm{B}_{10} = 1\,74611 / 330$. $\mathrm{B}_{11} = 8\,54513 / 138$.

$\mathrm{B}_{12} = 2363\,64091 / 2730$. $\mathrm{B}_{13} = 85\,53103 / 6$.

$\mathrm{B}_{14} = 2\,37494\,61029 / 870$. $\mathrm{B}_{15} = 861\,58412\,76005 / 14322$.

$\mathrm{B}_{16} = 770\,93210\,41217 / 510$. $\mathrm{B}_{17} = 257\,76878\,58367 / 6$.

$\mathrm{B}_{18} = 26315\,27155\,30534\,77373 / 19\,19190$

$\mathrm{B}_{19} = 2\,92999\,39138\,41559 / 6$

$\mathrm{B}_{20} = 2\,61082\,71849\,64491\,22051 / 13530$

$\mathrm{B}_{21} = 15\,20097\,64391\,80708\,02691 / 1806$

$\mathrm{B}_{22} = 278\,33269\,57930\,10242\,35023 / 690$

$\mathrm{B}_{23} = 5964\,51111\,59391\,21632\,77961 / 282$

$\mathrm{B}_{24} = 560\,94033\,68997\,81768\,62491\,27547 / 46410$

$\mathrm{B}_{25} = 49\,50572\,05241\,07964\,82124\,77525 / 66$

$\mathrm{B}_{26} = 80116\,57181\,35489\,95734\,79249\,91853 / 1590$

$\mathrm{B}_{27} = 29\,14996\,36348\,84862\,42141\,81238\,12691 / 798$

$\mathrm{B}_{28} = 2479\,39292\,93132\,26753\,68541\,57396\,63229 / 870$

$\mathrm{B}_{29} = 84483\,61334\,88800\,41862\,04677\,59940\,36021 / 354$

$\mathrm{B}_{30} = 121\,52331\,40483\,75557\,20403\,04994\,07982\,02460\,41491 / 567\,86730$

·11 $n \varepsilon \mathrm{N}_1 . \supset . \mathrm{B}_n \varepsilon \mathrm{R}$

Note. B_n est le $n^{ième}$ des nombres qui « ab inventore Jacobo Bernoulli vocari solent Bernoulliani » (Euler *Calc. diff.* t.2 §122).

Euler les a indiqués par B_1, B_3, B_5 ... ; Ohm a proposé la notation B_1, B_2, B_3, ... que nous adoptons.

Bernoulli a.1713 a calculé B_5 ; Euler B_{15}; Rothe (communiqués par Ohm dans JfM. a.1840 t.20 p.11) B_{31} ; Adams (JfM. a.1878 t.85 p.269) B_{62}.

Une bibliographie de ces nombres est publiée dans AJ. t.5 a.1882 p.228.

La Df·0 se rencontre dans Serret. Elle est simple, mais ne donne pas l'origine logique et historique des nombres B, qui résulte de la P·2.

·2 $m, n \varepsilon \mathrm{N}_1 . \supset . \Sigma\, (1 \cdots n)^m = n^{m+1}/(m+1) + n^m/2 +$
$\Sigma[\, (-1)^{r-1}\, \mathrm{C}(m, 2r-1)\, \mathrm{B}_r\, n^{m-2r+1}/(2r) \mid r, 1 \cdots \mathrm{E}(m/2) \,]$

} Jac. BERNOULLI a.1713 p.97 :

$$« \int n^c \infty \frac{1}{c+1} n^{c+1} + \frac{1}{2} n^c + \frac{c}{2} \mathrm{A} n^{c-1} + \frac{c \,.\, c-1 \,.\, c-2}{2 \,.\, 3 \,.\, 4} \mathrm{B} n^{c-3} + \ldots$$

et ita deinceps, exponentem potestatis ipsius n continue minuendo binario, quousque perveniatur ad n vel n^2. Literæ capitales A, B, C, D, etc., ordine denotant coëfficientes ultimorum terminorum pro $\int nn$, $\int n^4$, $\int n^6$, $\int n^8$ etc. nempe $\mathrm{A} \infty 1/6$, $\mathrm{B} \infty - 1/30$, $\mathrm{C} \infty 1/42$, $\mathrm{D} \infty - 1/30$ ». {

·21 $n\varepsilon N_1 .\supset. 2(2^{2n}-1)B_n \;\varepsilon\; N_1$

} Genocchi Ann. di Tortol. a.1852 t.3 p.399 {

·22 $n\varepsilon N_1 .\supset. \beta[(-1)^n B_n] = \Sigma\, /\mathrm{Np} \frown z\ni[2n\,\varepsilon\,(z-1)\times N_1]$

} Staudt JfM. a.1840 t.21 ; Clausen, Astron. Nachr. t.17 {

·23 $n\varepsilon \mathrm{Np} - (N_1+3) .\supset.$ nt $B_n \;\varepsilon\; n\times N_1$

} Adams a.1878 JfM. t.85 p.269 {

lim ·3 $\lim B = \infty$

log C ·4 $a\varepsilon N_1 . n\varepsilon N_1+1 .\supset. \Sigma/(1\cdots a) \;\varepsilon\; \log a + C + /(2a) +$
$\Sigma[(-1)^r B_r/(2ra^{2r}) \,|r, 1\cdots(n-1)] + \theta(-1)^n B_n/(2na^{2n})$

} Euler PetrNC. a.1769 t.14 i p.153 {

·5 $n\varepsilon N_1 .\supset. \Sigma(N_1^{-2n}) = 2^{2n-1}\pi^{2n} B_n/(2n)! \;.$
$2\Sigma(2N_0+1)^{-2n} = -\Sigma[(-1)^r/r^{2n} \,|r, N_1] = (2^{2n}-1)\pi^{2n}B_n/(2n)!$

·6 $\lim (n^2 B_n/B_{n+1})|n = \pi^2$

·7 $\lim B_n(\pi e/n)\uparrow(2n+/2) \;|n = 4\pi\surd e$

·8 $n\varepsilon N_1 .\supset. S[x^{2n-1}/(e^{2\pi x}-1) \,|x, Q] = B_n/(4n)$

} Euler PetrNC. a.1769 t.14 i p.151 {

* 2·1 $x\varepsilon q - \iota 0 . \mathrm{mod}x < 2\pi .\supset.$
$x/(e^x-1) = 1 - x/2 + \Sigma[(-1)^{r+1}B_r x^{2r}/(2r)! \,|r, N_1]$

·2 $a\varepsilon N_1 . n\varepsilon N_1+1 .\supset. \log a! \;\varepsilon\; (\log 2\pi)/2 - a + (a+/2)\log a +$
$\Sigma\{(-1)^r B_{r+1}/[(2r+1)(2r+2)]\, a^{-2r+1} \,|r, 0\cdots(n-1)\} +$
$\theta(-1)^n B_{n+1}/[(2n+1)(2n+2)]\, a^{-2n+1}$ } Stirling a.1730 {

·3 $x\varepsilon q - \iota 0 . \mathrm{mod}x < \pi .\supset.$
$/\sin x = /x + \Sigma[2(2^{2n+1}-1)B_{n+1} x^{2n+1}/(2n+2)! \,|n, N_1]$

·4 $x\varepsilon q . \mathrm{mod}x < \pi .\supset.$
$\mathrm{tng}x = \Sigma\{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n x^{2n-1}/(2n)! \,|n, N_1\}$

·5 Hp·3 $.\supset. /\mathrm{tng}x = /x - \Sigma[2^{2n}B_n x^{2n-1}/(2n)! \,|n, N_1]$

·6 Hp·3 $.\supset. \log(\sin x/x) = -\Sigma\{2^{2n-1}B_n x^{2n}/[n(2n)!] \,|n, N_1\}$

·7 $x\varepsilon q . \mathrm{mod}x < \pi/2 .\supset.$
$\log\cos x = -\Sigma\{(2^{2n}-1)2^{2n-1} B_n/[n(2n)!]x^{2n} \,|n, N_1\}$

·8 $x\varepsilon q - \iota 0 . \mathrm{mod}x < \pi/2 .\supset.$
$\log(\mathrm{tng}x/x) = \Sigma(2^{2n-1}-1)2^{2n}B_n/[n(2n)!]x^{2n} \,n, N_1\}$

CINQUIÈME PARTIE — VECTEURS

§91 pnt (= point) vct (= vecteur)

Note. Dans plusieurs travaux on a analysé les idées de la Géométrie par l'instrument de la Logique Mathématique.

Dans « Principii Geometria, logicamente esposti, a.1889 » et dans RdM. a.1894, p.51-90 nous avons suivi la Géométrie classique.

M. Pieri RdM. a.1897 p.9, TorinoM. a.1897, a.1899, a analysé directement les principes de la Géométrie de position, et ensuite de la Géométrie élémentaire.

L'analyse suivante de la théorie des vecteurs est extraite de TorinoA. a. 1898. Les idées et les propositions de Géométrie se rencontreront ici dans un ordre différent de l'ordinaire; mais on arrive tout de suite au calcul géométrique, déjà adopté dans plusieurs traités de Mathématiques pures et appliquées. Dans la « Practical Mathematics, summary of six lectures delivered to working men by Prof. J. Perry, London 1899 », l'A. adopte la théorie des vecteurs pour expliquer rapidement la géométrie à des ouvriers, qui n'avaient pas d'instruction précédente.

* 1·0 pnt = « point; idée primitive »
·1 pnt ε Cls ·2 ∃ pnt Pp

— * 2. a,b,c,d,e,f ε pnt .⊃.
·0 $a-b=c-d$.=. « relation primitive ».

Note. On peut lire cette relation comme en Algèbre.

Euclide la désigne par les mots « les lignes ab et cd sont égales, parallèles et de même sens » (voir P·4).

C. Wessel, a.1797 y reconnut les propriétés de l'égalité, et l'indiqua par $ab=cd$; p.4:

« ... on parvient à exprimer la direction des segments de droite situés dans un même plan d'une manière aussi analytique que leur longueur, sans que la mémoire soit embarrassée de nouveaux symboles ou de nouvelles règles. »

H. Grassmann, a.1844 y reconnut les propriétés de l'équidifférence, et l'indiqua par la notation adoptée ici; plus clairement a.1845 (Werke t.1 p.303):

« ... ich sage also, dass $B-A$ dann und nur dann gleich B_1-A_1 sei, wenn die geraden Linien von A nach B und von A_1 nach B_1 gleiche Länge und, Richtung haben. »

On rencontre la même remarque dans W. Hamilton, a.1845, Cambridge Journ. t.1, p.47 :

« ... the symbolic equation, D—C = B—A, may denote that the point D is ordinarily related (in space) to the point C as B is to A, and may in that view be expressed by writing the *ordinal analogy*, D..C::B..A: which admits of *inversion* and *alternation*. »

Cette notation est aussi une conséquence immédiate des formules de Möbius a.1827; plus clairement a.1844 p.608; mais ces A. n'ont pas fait un usage constant de cette notation.

Comme Euclide définit l'égalité des segments par le mouvement en géneral, on peut expliquer l'égalité des vecteurs $a-b=c-d$ par « on peut amener les points a et b à coïncider avec c et d par un mouvement de translation ».

Nous considérons cette relation comme une idée primitive, que nous déterminerons par des Pp, d'où découlent toutes les propriétés géométriques.

On peut remarquer dans la notation que nous suivons une économie non seulement sur le langage ordinaire, mais aussi sur les anciennes notations de Wessel, Bellavitis,... Ils écrivent en effet :

(1) AB = —BA, AB + BC = AC , de AB = CD on déduit AC = BD au lieu de :

(2) A—B = —(B—A), (A—B)+(B—C) = A—C, de A—B = C—D on déduit A — C = B — D.

Dans les notations (1) on doit apprendre un nouveau calcul, assujetti, à des règles spèciales ; dans les notations (2) on retrouve dans la forme les règles bien connues par l'Algèbre.

·1 $a-b=a-b$ Pp Ex: ·42

·2 $a-b=c-d \,.\supset.\, c-d=a-b$ Pp Ex: ·41

·3 $a-b=c-d \,.\, c-d=e-f \,.\supset.\, a-b=e-f$ Pp Ex: 3·11·21

Les Pp ·1·2·3 ont la forme d'identités de Logique, §1 P10, mais elles expriment des faits géométriques. Pour reconnaître leur indépendance, donnons à la relation fondamentale $a-b=c-d$ successivement les interprétations

« les points a,b,c,d coïncident »

« la distance $ab \gtreqless$ la distance cd »

« les quatre points sont dans un même plan »;

alors seront respectivement vérifiées les P ·2 et ·3, et non la ·1, les ·1 et ·3, et non la ·2, les ·1 et ·2 et non la ·3.

·4 $a-b=c-d \,.\supset.\, a-c=b-d$ Pp {Altern}

Ex: ·41 ·42 3·26 ·28

{ Euclides, I, P33:

Αἱ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι καὶ αὐταὶ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν. }

La P·4 permet de permuter les termes moyens dans l'équidifférence géométrique. Cette Pp est indépendante des précédentes, car si par $a-b=c-d$ on entend « distance ab = distance cd », les P·1·2·3 seront vérifiées mais non la ·4. Nous l'appelons « alterner ».

·41 $a-b=c-d \;.=.\; a-c=b-d \;.=.\; b-a=d-c \;.=.\; b-d=a-c$
$.=.\; c-a=d-b \;.=\; c-d=a-b \;.=.\; d-b=c-a$
$.=.\; d-c=b-a$ [P·2 . Altern $.\supset.$ P]

P·41. On déduit que l'équidifférence entre 4 points peut se mettre sous 8 formes différentes, comme les équidifférences numériques.

·42 $a-a=b-b$ Ex : 3·11 [P·1 . Altern $.\supset.$ P]

·5 $a-c=b-c \;.\supset.\; a=b$ Ex : 3·13 ·21 Pp

P·5. Si à la relation fondamentale on attribue la signification « la relation $a'-b'=c'-d'$ subsiste entre les projections de a,b,c,d sur un plan fixe », cette Pp5 ne sera pas verifiée, bien que toutes les précédentes le soient.

·6 $\exists\, \mathrm{pnt} \frown x\ni(x-a=b-c)$ Ex : 3·21 Pp

P·6. Si nous appelons « pnt » les points d'une figure finie, p. ex. intérieurs à une sphère, toutes les P précédentes seront vérifiées, mais non la nouvelle Pp.

* 3·0 $\mathrm{vct} = x\ni[\exists\,(a,b)\ni(a,b\,\varepsilon\,\mathrm{pnt}\,.\,x=b-a)]$ Df

·01 $\mathrm{vct} = \mathrm{pnt} - \mathrm{pnt}$

Le mot « vector » a été introduit par Hamilton a.1845 p. 56. Il vient de « vehere » car il représente une translation.

·1 $0 = \iota\, x\ni(a\,\varepsilon\,\mathrm{pnt} \;.\supset_a.\; x=a-a)$ Df

·11 $0\,\varepsilon\,\mathrm{vct}$ ·12 $a\,\varepsilon\,\mathrm{pnt} \;.\supset.\; a-a=0$ Ex : ·13

[$b\,\varepsilon\,\mathrm{pnt}$. P2·42 $.\supset:$ $a\,\varepsilon\,\mathrm{pnt} \;.\supset_a.\; b-b=a-a$ (1)
$b\,\varepsilon\,\mathrm{pnt}$. (1) $.\supset.$ $\exists\, x\ni(a\varepsilon\mathrm{pnt} \;.\supset_a.\; x=a-a)$ (2)
(2) Elim$b$. P1·2 $.\supset.$ ——————————— (3)
$a\,\varepsilon\,\mathrm{pnt} \;.\supset.\; x=a-a\,.\,y=a-a$. P2·3 $.\supset.$ $x=y$ (4)
(3) . (4) . §ι P·1 $.\supset.$ P·11·12]

·13 $a,b\,\varepsilon\,\mathrm{pnt} \;.\supset:\; a=b \;.=.\; a-b=0$
[Hp . $a=b$. P·12 $.\supset.$ $a-b=0$. P·12 $.\supset.$ $a-b=b-b$ (1)
P2·5 $.\supset.$ $a=b$ (2)
(1) . (2) $.\supset.$ P]

La P·1 définit le vecteur nul, qui est la valeur constante de l'expression $a-a$, quelque soit le point a.

La Dem. des P·11·12 prouve que cette expression a une et une seule valeur. On ne peut pas prendre comme Df la P·12, car elle n'est pas homogène.

$a,b \varepsilon \text{pnt} \,.\, u,v,w \varepsilon \text{vct} \,.\supset:$

·2 $a+u = \iota\, \text{pnt} \frown x \ni (x-a = u)$ Df

·21 $a+u \;\varepsilon\; \text{pnt}$ ·22 $(a+u)-a = u$ Ex : ·33·34

[P2·6 $.\supset.\ \exists\, \text{pnt} \frown x \ni (x-a = u)$ (1)

$x,y \varepsilon \text{pnt} \,.\, x-a = u \,.\, y-a = u$. P2·3 $.\supset.\ x-a = y-a$. P2·5 $.\supset.\ x=y$ (2)

(1) . (2) . §ι P·1 $.\supset.$ P·21·22]

·23 $a+(b-a) = b$ ·24 $b-a = u \,.=.\, b = a+u$ Ex : ·27

·25 $a+u+v = (a+u)+v$ Df

·26 $(a+u)-(b+u) = a-b$ [$(a+u, a, b+u, b) \,|\, (a,b,c,d)$P2·4 $.\supset.$ P]

·27 $a+u+v = a+v+u$

[$(a+v,a)\,|\,(a,b)$P·26 $.\supset.\ (a+v+u)-(a+u) = v$. P·24 $.\supset.$ P]

·28 $(a+u+v)-a = (b+u+v)-b$

[P·26 $.\supset.\ (a+u+v)-(b+u+v) = (a+u)-(b+u) = a-b$. P2·4 $.\supset.$ P

·3 $u+v = \iota\, x \ni [\, a \varepsilon \text{pnt} \,.\supset_a .\ x = (a+u+v)-a \,]$ Df

·31 $u+v \;\varepsilon\; \text{vct}$ ·32 $u+v = (a+u+v)-a$ [P·28 $.\supset.$ P]

·33 $a+u+v = a+(u+v)$ [P·32 . P·22 $.\supset.$ P]

·34 $u+v = v+u$ [P·27 . P·22 $.\supset.$ P] {Comm+}

·35 $u+(v+w) = (u+v)+w$ { Assoc+ }

[P·33 $.\supset.\ a+(\,(u+v)+w\,) = (\,a+(u+v)\,)+w = (\,(a+u)+v\,)+w =$

$(a+u)+(v+w) = a+(\,u+(v+w)\,)$. P·22 $.\supset.$ P]

·4 $-u = \iota\, \text{vct} \frown x \ni (u+x = 0)$ Df

·41 $-u \;\varepsilon\; \text{vct}$ ·42 $-(-u) = u$ ·43 $-(a-b) = b-a$

·44 $u-v = u+(-v)$ Df ·45 $u-u = 0$

Σ ✻ 4. vct $|N_0)$ §ΣP1

n $\times$ ✻ 5. $u,v \varepsilon \text{vct} \,.\, m \varepsilon N_1 \,.\, a,b \varepsilon \text{n} \,.\supset:$

·0 $0u = 0$. $mu = (m-1)u+u$. $(-m)u = -(mu)$ Df

·01 $mu = \Sigma\, \iota(\iota u \text{ F } 1\cdots m)$ Dfp

·1 $au \;\varepsilon\; \text{vct}$ ·11 $ua = au$ Df

·2 $(a+b)u = au+bu$ { Distrib($\times$,+) }

[$m,n \varepsilon N_1$. P·03 . P4·31 $.\supset.\ (m+n)u = \Sigma\iota[\iota u \text{ F } 1\cdots(m+n)] =$

$= \Sigma\iota[\iota u \text{ F } 1\cdots m] + \Sigma\iota[\iota u \text{ F } (m+1)\cdots(m+n)] = mu+nu$ (1)

(1) . P·0 . P·02 $.\supset.$ P]

·3 $a(u+v) = au+av$ { Distrib($\times$,+) }

[$m \varepsilon N_1$. P·03 $.\supset.\ m(u+v) = \Sigma\iota[\iota(u+v)\text{F}(1\cdots m)]$

——— . P4·41 $.\supset.$ ——— $= \Sigma\iota(\iota u\text{F}1\cdots m) + \Sigma\iota(\iota v\text{F}1\cdots m)$

——— . P·03 $.\supset.$ ——— $= mu+mv$ (1)

(1) . P·0 . P·02 $.\supset.$ P]

·4 $f\varepsilon \text{vct F } 1\cdots m \;.\supset.\; \Sigma(af) = a\Sigma f$

·5 $(ba)u = b(au)$ { Assoc × }

$[m\varepsilon N_1 \,.\, [\iota(u\text{F}1\cdots m) \,|\, f]\text{P}{\cdot}4 \;.\supset.\; m(au) = a(mu)$ (1)

$(1) \,.\, \text{P}{\cdot}0{\cdot}02 \;.\supset.\; \text{P} \,]$

·6 $mu = 0 \;.\supset.\; u = 0$ Pp

Note. On satisfera à toutes les Pp précédentes, mais non à la nouvelle ·6 si, en considérant les points d'une circonférence, l'on dit que $a-b = c-d$ si l'on peut amener les points a et b à coïncider avec c et d par une rotation autour du centre. Le 0 représentera alors l'identité, et une rotation répétée peut produire l'identité. Un autre exemple est fourni par les vecteurs sphériques, considérés par Möbius.

·7 $mu = mv \;.\supset.\; u = v$

$[\text{ Hp} \;.\supset.\; mu - mv = 0 \,.\, \text{P}{\cdot}3 \;.\supset.\; m(u-v) = 0 \,.\, \text{P}{\cdot}6 \;.\supset.\; \text{Ths }]$

n / r ❋ 6. $u,v\varepsilon \text{vct} \,.\, m,n\varepsilon N_1 \,.\, a,b\varepsilon \text{r} \;.\supset.$

·0 $u/m = \iota\, \text{vct} \frown v\ni(mv = u)$ Df

·1 $\exists\, \text{vct} \frown v\ni(mv = u)$ Pp

Note. On vérifie toutes les Pp précédentes, mais non la ·1, si l'on remplace « pnt » par « n »

·2 $u/m\; \varepsilon\, \text{vct} \;.\; m(u/m) = u$

·3 $p,q\varepsilon \text{n} \,.\, p/m = q/n \;.\supset.\; (up)/m = (uq)/n$

$[\text{ Hp} \;.\supset.\; pn = qm \;.\supset.\; u(pn) = u(qm) \,.\, \text{P}5{\cdot}5 \;.\supset.\; (up)n = (uq)m \,.\, \text{P}{\cdot}2 \;.\supset.$
$(up/m)mn = (uq/n)mn \,.\, \text{P}5{\cdot}7 \;.\supset.\; \text{Ths }]$

·4 $au = \iota\, v\ni[\, m\varepsilon N_1 \,.\, p\varepsilon \text{n} \,.\, p/m = a \;.\supset_{m,p}.\; v = up/m]$ Df

·5 $au\; \varepsilon\, \text{vct} \,.\, (a+b)u = au+bu \,.\, a(u+v) = au+av \,.$
$(ab)u = a(bu) = abu$

·6 $au = 0 \;.=.\; a = 0 \;.\cup.\; u = 0$

r Σ ❋ 7.

$m,n\varepsilon N_1 \,.\, a\varepsilon \text{pnt F } 1\cdots m \,.\, x\varepsilon \text{rF}1\cdots m \,.\, b\varepsilon \text{pnt F}1\cdots n \,.\, y\varepsilon \text{rF}1\cdots n \;.\supset.$

·0 $\Sigma(x_r a_r | r, 1\cdots m) = 0 \;.=:\; c\varepsilon \text{pnt} \;.\supset_c.\; \Sigma[x_r(a_r - c) \,|\, r, 1\cdots m] = 0$ Df

·1 $\Sigma(xa) = \Sigma(yb) \;.=.\; \Sigma(xa) + \Sigma(-yb) = 0$ Df

·2 $p\varepsilon \text{pnt} \;.\supset.\; \Sigma(xa) = (\Sigma x)p + \Sigma[x_r(a_r - p) \,|\, r, 1\cdots m]$

·3 $\Sigma x = 0 \;.\supset.\; \Sigma(xa)\; \varepsilon\, \text{vct}$

·4 $\Sigma x \mathrel{-}= 0 \;.\supset.\; (\Sigma xa)/(\Sigma x)\; \varepsilon\, \text{pnt}$

Note. Soient $a,b,c\ldots$ des points. Nous avons donné une signification aux formules $a-b$ (P2·0), $a+(b-c)$ (P3·2), $(a-b)+(b-c)$ (P3·3).

Nous voulons maintenant introduire des expressions de la forme

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots x_n a_n \quad \text{ou} \quad \Sigma(x_r a_r \mid r, 1 \cdots n),$$

où les x sont des nombres rationnels et les a des points. Nous définissons d'abord l'égalité $x_1 a_1 + \dots = 0$, (P·0), et ensuite l'égalité de deux sommes de points. Si la somme des coefficients numériques est nulle, alors la somme des points est réductible à un vecteur (P·3). Si cette somme n'est pas nulle alors la somme des points divisée par la somme des coefficients numériques est un point. Ce point s'appelle le « barycentre » des points donnés avec des masses (positives ou négatives) mesurées par leurs coefficients.

Le barycentre se présenta d'abord dans la mécanique ; Archimedes l'appelle *κέντρον τοῦ βάρεος*. Carnot a.1801 l'a défini par des seules idées géométriques, en l'appellant « centre des moyennes distances » (p.154). L'expression $\Sigma xa / \Sigma x$ pour indiquer le barycentre se rencontre dans Möbius, a.1827 t.1 p.37.

$+ \times$ q ✻ 8. $u, v, w \varepsilon$ vct . $m \varepsilon N_1$. $p \varepsilon$ n . $x \varepsilon$ r .⊃.

·0 $u \times v =$ « produit (intérieur ou scalaire) des vecteurs u et v, déterminé par les Pp ·1·2·3 9·1 ».

·1 $u \times v \; \varepsilon$ q — Pp

·2 $u \times v = v \times u$ — Pp {Comm×}

·3 $(u + v) \times w = u \times w + v \times w$ — Pp {Distrib(×,+)}

Pour définir les propriétés métriques des figures, comme longueurs, angles,... et aussi le produit d'un nombre irrationnel par un vecteur, nous introduisons, comme une nouvelle idée primitive le produit $u \times v$.

On peut relier la fonction $u \times v$ aux idées communes par la P31·3. Le produit d'un vecteur par lui-même est le carré de sa longueur. Le produit de deux vecteurs orthogonaux est 0. $u \times v$ est le travail mécanique d'une force représentée par le vecteur u, lorsque le point d'application reçoit un déplacement représenté par v.

Ce produit se rencontre dans Euclide sous la forme d'une longue périphrase (Voir P·61).

H. Grassmann a.1846 t.1 p.345, après y avoir reconnu les propriétés commutative (P·2) et distributive (P·3), l'appelle « innere Product », et le désigne par la notation que nous suivons, adopté aussi par Resal, Somoff,... Grassmann a.1862 a indiqué la même fonction par $u|v$, en la décomposant dans le produit de u par un nouvel objet $|v$.

Cette fonction se rencontre aussi indirectement dans les quaternions de Hamilton, où est indiquée par $-$S uv. En conséquence, selon Hamilton, on a $u^2 = -(\text{mod}\, u)^2$, contrairement à la Pp 9·1.

Grassmann a aussi considéré le produit extérieur de deux vct, qui coïncide à peu près avec le vecteur du produit des deux vct, selon Hamilton. Ce produit a la propriété distributive, mais non la commutative.

$\cdot 31 \quad 0 \times u = 0$ $\qquad [\ (0,0,u) | (u,v,w)\ \mathrm{P}\cdot 3\ .\supset.\ \mathrm{P}\ ]$

$\cdot 32 \quad f \varepsilon\, \mathrm{vct\,F}\, 1 \cdots m\ .\supset.\ (\Sigma f) \times v = \Sigma (f \times v)$ $\qquad [\ \mathrm{P}\cdot 3 \supset \mathrm{P}\ ]$

$\cdot 33 \quad (mu) \times v = m(u \times v)$ $\qquad [\ \{\iota(u\mathrm{F}1 \cdots m) | f\}\ \mathrm{P}\cdot 32\ .\supset.\ \mathrm{P}\ ]$

$\cdot 34 \quad (-u) \times v = -(u \times v)$ $\qquad [\ (-u,v) | (v,w)\ \mathrm{P}\cdot 3\ .\ \mathrm{P}\cdot 31\ .\supset.\ \mathrm{P}\ ]$

$\cdot 35 \quad (-mu) \times v = -m(u \times v)$ $\qquad [\ \mathrm{P}\cdot 34\ .\ \mathrm{P}\cdot 33\ .\supset.\ \mathrm{P}\ ]$

$\cdot 36 \quad (pu) \times v = p(u \times v)$ $\qquad [\ = \mathrm{P}\cdot 31 \cdot 33 \cdot 35\ ]$

$\cdot 37 \quad (u/m) \times v = (u \times v)/m$ $\qquad [\ (u/m) | u\ \mathrm{P}\cdot 33\ .\supset.\ \mathrm{P}\ ]$

$\cdot 38 \quad (up/m) \times v = (u \times v)p/m$ $\qquad [\ (up) | u\ \mathrm{P}\cdot 37\ .\ \mathrm{P}\cdot 33\ .\supset.\ \mathrm{P}\ ]$

$\cdot 39 \quad (xu) \times v = x(u \times v)$ $\qquad [\ \mathrm{P}\cdot 38\ .\supset.\ \mathrm{P}\ ]$

$\cdot 40 \quad u^2 = u \times u$ $\qquad$ Df

$\cdot 41 \quad (u+v)^2 = u^2 + 2u \times v + v^2$

$\cdot 42 \quad (u+v+w)^2 = u^2 + v^2 + w^2 + 2u \times v + 2u \times w + 2v \times w$

$\cdot 43 \quad (u+v) \times (u-v) = u^2 - v^2$

$\cdot 44 \quad (u+v)^2 + (u-v)^2 = 2(u^2+v^2)$ { Lagny ParisM. a.1706 p.319 :
Dans tout parallelogramme la somme des quarrez des deux diagonales est égale à la somme des quarrez des quatre côtez. }

$\cdot 45 \quad (u+v)^2 - (u-v)^2 = 4u \times v$

$\cdot 46 \quad (u+v+w)^2 + (u+v-w)^2 + (u+w-v)^2 + (v+w-u)^2 = 4(u^2+v^2+w^2)$
{ Legendre *Géom.* p.227 :
« ... dans tout parallélipipède, la somme des carrés des quatre diagonales est égale à la somme des carrés des douze arêtes. » }

$\cdot 47 \quad (u+v+w)^2 + u^2 + v^2 + w^2 = (u+v)^2 + (v+w)^2 + (w+u)^2$

$\cdot 48 \quad (u-v)^2 + (v-w)^2 + (w-u)^2 + (u+v+w)^2 = 3(u^2+v^2+w^2)$

$a,b,c \varepsilon\, \mathrm{pnt}\ .\supset.$

$\cdot 6 \quad (a-b) \times (a-c) = 0\ .=.\ (a-b)^2 = (a-c)^2 + (b-c)^2$
{ Pythagoras; Cfr. Plutarchos *Symp.* VIII c.4 }
{ Euclides I P47 P48 }

$\cdot 61 \quad (a-b)^2 = (a-c)^2 + (b-c)^2 - 2(a-c) \times (b-c)$

$\cdot 62 \quad (a-b)^2 = (a-c)^2 + (b-c)^2 + 2(a-c) \times (c-b)$
{ Euclides II P12 P13 }

$\cdot 63 \quad 2[a-(b+c)/2]^2 = (a-b)^2 + (a-c)^2 - (b-c)^2/2$
{ Apollonius Pergæus voir P·9 }

Le vecteur $a-(b+c)/2$ s'appelle " médiane " du triangle *abc*.

$a,b,c,d \varepsilon\, \mathrm{pnt}\ .\supset.$

$\cdot 7 \quad (a-b) \times (c-d) + (b-c) \times (a-d) + (c-a) \times (b-d) = 0$

$\cdot 71 \quad (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-d)^2 + (d-a)^2 = (a-c)^2 + (b-d)^2 +$
$4[(a+c)/2 - (b+d)/2]^2$ {Euler PetrNC. a.1748 t.1 p.66 }

$a,b,x,y \varepsilon$ pnt $.\supset.$

·8 $(x-a)\times(x-b)=0 .=. [x-(a+b)/2]^2=(b-a)^2/4$

} THALES ; Cfr. DIOGENIS LAERTII I 24 : « φησὶ Παμφίλη πρῶτον (THALES) καταγράψαι κύκλου τὸ τρίγωνον ὀρθογώνιον καὶ θῦσαι βοῦν. » Version : « Pamphila (a.100) dit que Thales, le premier, inscrivit le triangle rectangle dans le demi-cercle et qu'à cette occasion il sacrifia un bœuf. » {

·81 $(x-a)^2=(x-b)^2 .=. [x-(a+b)/2]\times(b-a)=0$

·82 $(x-a)^2-(x-b)^2=(y-a)^2-(y-b)^2 .=. (x-y)\times(a-b)=0$

·83 $m \varepsilon$ R-ι1 $.\supset:$

$(x-a)^2=m(x-b)^2 .=. [x-(mb-a)/(m-1)]^2=(b-a)^2 m/(m-1)^2$

} ·82-83 APOLLONIUS t.2 p.116: « ἐὰν ἀπὸ δύο δεδομένων σημείων εὐθεῖαι κλασθῶσιν, καὶ ᾖ τὰ ἀπ'αὐτῶν δοθέντι κωρίῳ διαφέροντα, τὸ σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένης εὐθείας·

ἐὰν δὲ ὦσιν ἐν λόγῳ δοθέντι, ἤτοι εὐθείας ἢ περιφερείας· » {

·9 $n \varepsilon N_1 . a \varepsilon$ pnt F $1\cdots n . g=(\Sigma a)/n . x \varepsilon$ pnt $.\supset.$

$\Sigma(x-a)^2=n(x-g)^2+\Sigma(g-a)^2$

} APOLLONIUS t.2 p.116: « ἐὰν ἀπὸ ὁσωνοῦν δεδομένων σημείων κλασθῶσιν εὐθεῖαι πρὸς ἑνὶ σημείῳ, καὶ ᾖ τὰ ἀπὸ πασῶν εἴδη ἴσα δοθέντι χωρίῳ, τὸ σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένης περιφερείας· » {

mod ✻ 9·1 $u \varepsilon$ vct-ι0 $.\supset.$ $u^2 \varepsilon Q$ Pp

$u \varepsilon$ vct $.\supset.$ ·2 mod$u=\sqrt{(u^2)}$ Df

·21 mod$u=0 .=. u=0$ ·22 mod$(-u)=$mod$u$

·23 $x \varepsilon r .\supset.$ mod$(xu)=$mod$x$ mod$u$

[mod$(xu)=\sqrt{[(xu)^2]}=\sqrt{(x^2u^2)}=\sqrt{(x^2)}\sqrt{(u^2)}=modx$ mod$u$]

·3 mod$(u\times v) \leqq$ mod$u$ mod$v$

[$x \varepsilon r .\supset. (xu+v)^2 \geqq 0 .\supset. x^2u^2+2xu\times v+v^2 \geqq 0$. §Q P51·3 $.\supset.$ (mod$u)^2$ (mod$v)^2 \geqq (u\times v)^2 .\supset.$ P]

$u,v \varepsilon$ vct $.\supset.$ ·4 mod$(u+v) \leqq$ mod$u+$mod$v$

[P·3 $.\supset.$ mod$(u+v)=\sqrt{(u^2+2u\times v+v^2)} \leqq \sqrt{[(\text{mod}u)^2+2\text{mod}u\ \text{mod}v+(\text{mod}v)^2]} .\supset.$ P]

·41 $a,b,c \varepsilon$ pnt $.\supset.$ mod$(a-b) \leqq$ mod$(a-c)+$mod$(c-b)$

} EUCLIDES I P20 :

« Παντός τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι. » {

·5 $a,b,c \varepsilon$ pnt . mod$(a-b)=$mod$(a-c)=$mod$(b-c)=1 .\supset.$

mod$[(a+b)/2-c]=\sqrt{3}/2$.

mod$[(a+b+c)/3-a]=/\sqrt{3}$ } EUCLIDES XIII P12:

« Ἐὰν εἰς κύκλον τρίγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ, ἡ του τριγώνου πλευρὰ δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου. » {

·6 $a,b,c,d \varepsilon$ pnt . $\mathrm{mod}(a-b) = \mathrm{mod}(a-c) = \mathrm{mod}(a-d) = \mathrm{mod}(b-c) = \mathrm{mod}(b-d) = \mathrm{mod}(c-d) = 1 \;.\supset.$
$\mathrm{mod}[(a+b)/2-(c+d)/2] = \sqrt{(/2)}$.
$\mathrm{mod}[(a+b+c)/3-d] = \sqrt{(2/3)}$.
$\mathrm{mod}[(a+b+c+d)/4-a] = \sqrt{6}\,/4$ { Euclides XIII P13:
« ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἡμιολία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος. » }

λ ✻ 10. (vct | q_n) §q_n P11-14

✻ 11.

·1 $u \varepsilon$ vct . $x \varepsilon$ q $.\supset.$ $xu = \iota \{ \lambda[(\mathrm{r} \frown \theta x)u] \frown \lambda[(\mathrm{r} \frown x/\theta)u] \}$ Df

·2 $x \varepsilon$ q-r . $u \varepsilon$ vct $.\supset.$ $xu \;\varepsilon$ vct Pp

·3 (q | r) P6·5·6, P7, P8·39

Note. La P·1 définit le produit d'un nombre irrationnel par un vecteur. La Pp·2, qui affirme l'existence de ce produit, cesse de valoir si l'on remplace les « vct » par les « r », bien que toutes les Pp précédentes soient satisfaites.

✻ 12·1 $i \varepsilon$ vct-$\iota 0$ $.\supset.$ ∃ vct-(qi) Pp

·2 $i \varepsilon$ vct-$\iota 0$. $j \varepsilon$ vct-(qi) $.\supset.$ ∃ vct-(qi+qj) Pp

·3 $i \varepsilon$ vct-$\iota 0$. $j \varepsilon$ vct-(qi) . $k \varepsilon$ vct-(qi+qj) $.\supset.$ vct = qi+qj+qk Pp

La Pp·1 dit qu'il existe des vecteurs non parallèles à un vecteur donné ; elle n'est pas satisfaite si l'on considère seulement les vecteurs appartenant à une droite fixe.

La Pp·2 dit qu'il existe des vecteurs non coplanaires avec deux vecteurs non parallèles donnés. Elle n'est pas satisfaite si l'on considère seulement les vecteurs d'un plan fixe.

La Pp·3 dit que l'espace que nous considérons a trois dimensions. Elle n'est pas satisfaite si l'on remplace les « vct » par des « q_4 ».

Ces trois Pp, nécessaires dans quelques cas, nous sont moins intéressantes.

·4 Hp·3 . $x,y,z \varepsilon$ q . $xi+yj+zk = 0$ $.\supset.$ $x=0$. $y=0$. $z=0$

·5 Hp·3 . $x,y,z,x',y',z' \varepsilon$ q . $xi+yj+zk = x'i+y'j+z'k$ $.\supset.$ $x=x'$. $y=y'$. $z=z'$

·6 Hp·3 . $o \;\varepsilon$ pnt $.\supset.$ pnt $= o+$qi+qj+qk

Les nombres x,y,z qui figurent dans les P·4·5 s'appellent « coordonnées du vecteur $xi+yj+zk$ par rapport aux vecteurs fondamentaux i,j,k ». Ils s'appellent aussi « coordonnées du point $o+xi+yj+zk$ par rapport à l'origine o et aux mêmes vecteurs. Dans les Hp de la P13 les coordonnées sont cartésiennes orthogonales.

Les quantités x,y,z,t sont les coordonnées barycentriques de $xa+yb+zc+td$, si $a,b,c,d \varepsilon$ pnt ; en sont les projectives, si a,b,c,d sont des sommes de points.

✻ 13. $i, j, k\, \varepsilon$ vct . $i^2 = j^2 = k^2 = 1$. $i \times j = i \times k = j \times k = 0$.⊃:
·1 $u\, \varepsilon$ vct .⊃. $u = (u\times i)i + (u\times j)j + (u\times k)k$
·2 $x,y,z,x',y',z'\, \varepsilon$ q .⊃. $(xi+yj+zk)\times(x'i+y'j+z'k) = xx'+yy'+zz'$
·3 $x,y,z\, \varepsilon$ q .⊃. $\mathrm{mod}(xi+yj+zk) = \sqrt{(x^2+y^2+z^2)}$

✻ 14·1 $a,b,c\, \varepsilon$ pnt . $d\, \varepsilon\, a+\theta(c-a)$. $e\, \varepsilon\, b+\theta(d-b)$.⊃.
$\mathrm{mod}(e-b)+\mathrm{mod}(e-c) \leqq \mathrm{mod}(a-b)+\mathrm{mod}(a-c)$
{ Euclides I P21 }
·2 $a,b,c\, \varepsilon$ pnt . $m,n\, \varepsilon$ q .⊃.
$[(m+n)a-(mb+nc)]^2 = m(m+n)(a-b)^2+n(m+n)(a-c)^2-mn(b-c)^2$
{ Stewart a.1763 }
·3 $a,b,c,d\, \varepsilon$ pnt . $m,n,p\, \varepsilon$ q .⊃.
$[(m+n+p)a-(mb+nc+pd)]^2 = (m+n+p)[m(a-b)^2+n(a-c)^2$
$+p(a-d)^2] - mn(b-c)^2 - mp(b-d)^2 - np(c-d)^2$

U ✻ 15. $u\, \varepsilon$ vct−ι0 .⊃. ·0 $\mathrm{U}u = u/\mathrm{mod}\, u$ Df
·1 $\mathrm{mod}\, \mathrm{U}u = 1$. $\mathrm{U}(-u) = -\mathrm{U}u$. $a\varepsilon$Q .⊃. $\mathrm{U}\, au = \mathrm{U}u$

Note. La fonction Uu, qu'on peut lire « le vecteur unitaire dans la direction de u », a été considérée et désignée par ce signe, par Hamilton.
L'opération U correspond à l'opération « sgn » sur les nombres.

cmp∥ cmp⊥ ✻ 16. $u,v,w\, \varepsilon$ vct . mod$u$ =1 .⊃.
·0 (cmp∥u)v = $(u\times v)u$ {= « composante parallèle à u de v »} Df
·01 (cmp⊥u)v = v−(cmp∥u)v {= « » normale à u de v »} Df
·1 (cmp∥u) $(v+w)$ = (cmp∥u)v+(cmp∥u)w
·11 ——⊥———————————⊥————————⊥——
·2 $u,v\, \varepsilon$ vct . u−=0 .⊃.
(cmp∥u)v = (cmp∥Uu)v . (cmp⊥u)v = (cmp⊥Uu)v Df

Lm lim ✻ 20. (vct | q_n) §q_n P21-24 30
(pnt | q_n) ————————

✻ 21. $k\, \varepsilon$ Cls'q . $x\, \varepsilon\, \delta k$. $u\, \varepsilon$ (Cls'pnt)fk .⊃.
lim(u,k,x) = pnt ∩ aɜ{ lim[l mod$(a-uz)$ | z, k, x] =0 } Df
Ex. rectaTang P51 P52

D S ✻ 22. (pnt | q_n)§q_nP31
(vct | q_n) ——31-34. 40. 41.

✻ 23·1 $u\, \varepsilon$ (vct−ι0)Fq . Du ε vctFq .⊃. D mod$u$ = Uu×Du
·2 D Uu = [(cmp⊥u)Du]/mod$u$

Dtrm ✱ 29.

·1 $u,v\varepsilon$ vct f 1⋯4 .⊃. Dtrm$[u_r \times v_s \mid (r,s)$, 1⋯4 ⁝ 1⋯4$] = 0$

Subst ✱ 30. (vct |q_n) §Subst P1-2

U cos ✱ 31.

$u,v\varepsilon$ vct . mod$u$ = mod$v$ = 1 .⊃. ·0 $\cos(u,v) = u \times v$ Df

$u,v\varepsilon$ vct-ι0 .⊃. ·1 $\cos(u,v) = \cos(\mathrm{U}u, \mathrm{U}v) = (\mathrm{U}u)\times(\mathrm{U}v)$ Df

·2 $\cos(u,v) = \cos(v,u)$. $\cos(-u,v) = \cos(u,-v) = -\cos(u,v)$. $\cos(-u,-v) = \cos(u,v)$. $-1 \leqq \cos(u,v) \leqq 1$

·3 $u \times v =$ mod$u$ mod$v$ $\cos(u,v)$

·4 $\cos(u,v) = 1$.=. $v\varepsilon$ Qu : $\cos(u,v) = -1$.=. $v\varepsilon$ −Qu

ang = (angle)

✱ 32. $u,v\varepsilon$ vct -ι0 .⊃. ·0 $\mathrm{ang}(u,v) = \cos^{-1}[\cos(u,v)]$ Df

·1 $\mathrm{ang}(u,v)\ \varepsilon\ \Theta\pi$

·11 $\mathrm{ang}(u,v) = \mathrm{ang}(v,u) = \mathrm{ang}(-u, -v)$ }Euclides I P15 }

·12 » $= \pi - \mathrm{ang}(u,-v) = \mathrm{ang}(\mathrm{U}u, \mathrm{U}v)$ } » 13 }

·13 $u+v$ -= 0 .⊃. $\mathrm{ang}(u,v) = \mathrm{ang}(u, u+v) + \mathrm{ang}(u+v, v)$

·14 $u,v,w\varepsilon$ vct-ι0 .⊃. $\mathrm{ang}(u,w) \leqq \mathrm{ang}(u,v) + \mathrm{ang}(v,w)$. $\mathrm{ang}(u,v) + \mathrm{ang}(v,w) + \mathrm{ang}(w,u) \leqq 2\pi$ } Euclides XI P20, 21 }

·2 $\cos(u,v) = \cos \mathrm{ang}(u,v)$ ·3 $\sin(u,v) = \sin \mathrm{ang}(u,v)$ Df

·4 $\sin(u,v) = 0$.=. $u\varepsilon$ qv ·5 mod (cmp⊥u)v = mod$v$ $\sin(u,v)$

✱ 33. $p,q,r\varepsilon$ pnt . p-=q . p-=r . q-=r . a=mod$(q-r)$. b=mod$(r-p)$. c=mod$(p-q)$. a'=ang$(p-q,p-r)$. b'=ang$(q-r, q-p)$. c'=ang$(r-p,r-q)$. $s = (a+b+c)/2$.⊃.

·1 $a=b$.=. $a'=b'$ } Euclides I P 5, 6 }

·2 $a<b$.=. $a'<b'$ } » 18, 19 }

·3 $a'+b'+c' = \pi$ } Euclides I P32 }

·4 $a = b\cos c' + c \cos b'$ ·5 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos a'$ [= P8·61]

·6 $\sin a'/a = \sin b'/b = \sin c'/c$

} Nasîr Eddin Attûsi a.1260 l.III }

[Hp .⊃. $p-r = (p-q)+(q-r)$ (1)
Hp . (1) .⊃. [cmp⊥$(p-q)$]$(p-r)$ = [cmp⊥$(p-q)$]$(q-r)$ (2)
Hp . (2) . P32·5 .⊃. P]

·61 $bc \sin a' = 2\sqrt{[s(s-a)(s-b)(s-c)]}$ }Heron a.−150 p.286}

$(bc \sin a')/2$ est l'aire du triangle pqr.

·7 $\sin(a'/2) = \sqrt{[(s-b)(s-c)/(bc)]}$. $\cos(a'/2) = \sqrt{[s(s-a)/(bc)]}$.
$\text{tng}(a'/2) = \sqrt{\{(s-b)(s-c)/[s(s-a)]\}}$

·8 $\text{tng}[(a'-b')/2] / \text{tng}(c'/2) = (a-b)/(a+b)$

* 34. $u \varepsilon \text{vct}-\iota 0$. $v \varepsilon \text{vct}-\text{q}u$. $w \varepsilon \text{vct}-(\text{q}u+\text{q}v)$.⊃.

·0 $\text{ang}(u;v,w) = \text{ang}[(\text{cmp}\perp u)v, (\text{cmp}\perp u)w]$ Df

» = (angle dièdre déterminé par les plans uv et uw)

$a = \text{ang}(v,w)$. $b = \text{ang}(w,u)$. $c = \text{ang}(u,v)$. $a' = \text{ang}(u;v,w)$. $b' = \text{ang}(v;w,u)$. $c' = \text{ang}(w;u,v)$. $s = (a+b+c)/2$. $s' = (a'+b'+c')/2$.⊃.

·01 $a < b+c$. $a+b+c < 2\pi$ [= P32·14]

·02 $a' > b'+c'-\pi$. $\pi < a'+b'+c' < 3\pi$

·1 $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos a'$

[$\cos(v,w) = \text{U}v \times \text{U}w$

$= [(\text{cmp}\| u)\text{U}v + (\text{cmp}\perp u)\text{U}v] \times [(\text{cmp}\| u)\text{U}w + (\text{cmp}\perp u)\text{U}w]$

$= [(\text{cmp}\| u)\text{U}v] \times [(\text{cmp}\| u)\text{U}w] + [(\text{cmp}\perp u)\text{U}v] \times [(\text{cmp}\perp u)\text{U}w]$.⊃. P]

{ Al battâni a.929 ; voir BD. a.1892 p.147 }

{ Regiomontanus a.1533 p.127 :

« In omni triangulo sphærali ex arcubus circulorum magnorum constante, proportio sinus versi anguli cuiuslibet [$1-\cos a'$] ad differentiam duorum sinuum versorum, quorum unus est lateris eum angulum subtendentis [$1-\cos a$], alius vero differentiæ duorum arcuum ipsi angulo circumiacentium [$1-(\cos b \cos c + \sin b \sin c)$] est tanquam proportio quadrati sinus recti totius [1] ad id, quod sub sinibus arcuum dicto angulo circumpositorum continetur rectangulum [$\sin b \sin c$]. » }

·2 $\sin a' / \sin a = \sin b' / \sin b = \sin c' / \sin c$

{ Abû'lwéfa a.940–998 ; voir *Journal Asiatique* a.1892 s.8 t.19 p.423 }

{ Regiomontanus a.1533 p.95 :

« In omni triangulo ... sinus laterum ad sinus angulorum eis oppositorum eandem habent proportionem ». }

·3 $\cos a' = -\cos b' \cos c' + \sin b' \sin c' \cos a$

·4 $\cos b \cos c' = \sin b / \text{tng} a - \sin c' / \text{tng} a'$

·5 $\sin b \sin c \sin a' = 2\sqrt{[\sin s \sin(s-a) \sin(s-b) \sin(s-c)]}$

·6 $\sin(a'/2) = \sqrt{\{\sin(s-b)\sin(s-c)/[\sin b \sin c]\}}$ { Neper a.1614 p.48

$\cos(a'/2) = \sqrt{\{\sin s \sin(s-a)/[\sin b \sin c]\}}$ { » » » }

$\sin(a/2) = \sqrt{\{-\cos s' \cos(s'-a')/[\sin b' \sin c']\}}$

$\cos(a/2) = \sqrt{\{\cos(s'-b')\cos(s'-c')/[\sin b' \sin c']\}}$

·7 $\sin[(a'-b')/2]\sin(c/2) = \sin[(a-b)/2]\cos(c'/2)$
$\cos[(a'-b')/2]\sin(c/2) = \sin[(a+b)/2]\sin(c'/2)$
$\sin[(a'+b')/2]\cos(c/2) = \cos[(a-b)/2]\cos(c'/2)$
$\cos[(a'+b')/2]\cos(c/2) = \cos[(a-b)/2]\sin(c'/2)$
{ Delambre *Connaiss. des temps*, a.1807 }

·8 $\mathrm{tng}[(a'+b')/2] = /\mathrm{tng}(c/2)\cos[(a-b)/2]/\cos[(a+b)/2]$
$\mathrm{tng}[(a'-b')/2] =$ » sin » sin »
{ Neper a.1614 p.48 }

❋ 35·1 $a,b,c\,\varepsilon\,\mathrm{pnt}\,.\,\mathrm{mod}(a-b) = \mathrm{mod}(a-c) = \mathrm{mod}(b-c) = 1\,.\supset.$
$\cos(b-a, c-a) = \sin[a-b, a-(b+c)/2] = /2$.
sin » = cos » » $= \sqrt{3}/2$

·2 $a,b,c,d\,\varepsilon\,\mathrm{pnt}\,.\,\mathrm{mod}(a-b) = \mathrm{mod}(a-c) = \mathrm{mod}(a-d) =$
$\mathrm{mod}(b-c) = \mathrm{mod}(b-d) = \mathrm{mod}(c-d) = 1\,.\supset.$
$\cos[(a+b)/2-c, (a+b)/2-d] = /3$
sin » » » » $= 2\sqrt{2}/3$
$\cos[(a+b)/2-c, (a+b)/2-(c+d)/2] = \sqrt{(2/3)}$
sin » » » » » $= \sqrt{/3}$

❋ 39. recta plan

·1 $a\varepsilon\,\mathrm{pnt}\,.\,u\varepsilon\,\mathrm{vct}\text{-}\iota 0\,.\supset.\,\mathrm{recta}(a,u) = a+\mathrm{q}u$ Df
·2 $a\varepsilon\,\mathrm{pnt}\,.\,b\varepsilon\,\mathrm{pnt}\text{-}\iota a\,.\supset.\,\mathrm{recta}(a,b) = \mathrm{recta}(a, b-a)$ Df
$= a+\mathrm{q}(b-a)$ Dfp
·3 $a\varepsilon\,\mathrm{pnt}\,.\,u\varepsilon\,\mathrm{vct}\,.\,v\varepsilon\,\mathrm{vct}\text{-}\mathrm{q}u\,.\supset.\,\mathrm{plan}(a,u,v) = a+\mathrm{q}u+\mathrm{q}v$ Df
·4 $a\varepsilon\,\mathrm{pnt}\,.\,b\varepsilon\,\mathrm{pnt}\text{-}\iota a\,.\,c\varepsilon\,\mathrm{pnt}\text{-}\mathrm{recta}(a,b)\,.\supset.$
$\mathrm{plan}(a,b,c) = \mathrm{plan}(a,b-a,c-a)$ Df
·5 $\mathrm{Hp}\cdot 4\,.\supset.\,\mathrm{plan}[\mathrm{recta}(a,b),c] = \mathrm{plan}(a,b,c)$ Df

Ex. §rectaTangP2.

Nous donnons ici les définitions de la droite (recta) déterminée par un point et un vecteur ou par deux points, et du plan déterminé par un point et deux vecteurs, ou par trois points.

❋ 40.

Nous donnons ici les définitions symboliques de plusieurs mots géométriques, sans nous prononcer sur l'utilité d'introduire des symboles pour indiquer ces idées dans un développement de la Géométrie symbolique.

$u,v,w\varepsilon\,\mathrm{vct}\text{-}\iota 0\,.\,a\varepsilon\,\mathrm{pnt}\,.\,b,c\varepsilon\,\mathrm{pnt}\text{-}\iota a\,.\,r\varepsilon\mathrm{Q}\,.\,k\,\varepsilon\,\mathrm{Cls'pnt}\,.\supset.$
$\mathrm{q}u$ = (vecteur parallèle à u) = (point à l'infini de u).
$\mathrm{Q}u$ = (vecteur parallèle et de même sens que u).

$a+Q(b-a) =$ (rayon d'origine a et passant par b).
$a+\Theta(b-a) =$ (le même segment avec les extremités).
$a+\theta(b-a) =$ (segment de droite limitée par a et b, ces point exclus).
$=$ (droite à l'infini qui contient qu et qv).

·2 qu+qv = (vecteur coplanaire avec u et v)
$a+Qu+Qv =$ (angle de sommet a et de côtés au et av).
(son supplémentaire) $= a+Qu-Qv$
(son opposé) $= a-Qu-Qv$

·3 a+qu+Qv+Qw = (angle dièdre ; l'arête est a+qu, les faces sont : a+qu+Qv, a+qu+Qw).
$a+Qu+Qv+Qw =$ (angle trièdre ; a est le sommet. $a+Qu$, $a+Qv$, ... sont les arêtes, et $a+Qu+Qv$, $a+Qu+Qw$, ... sont les faces.
$a+\theta u+\theta v =$ (parallélogramme).
$a+\theta u+\theta v+\theta w =$ (parallélépipède).
k+qu = (cylindre qui projette selon la direction u la figure k).
a+q($k-a$) = (cône qui projette k du point a).

·4 l'angle (u,v) est droit = ($u\times v=0$)
» » aigu = (» >0)
» » obtus = (» <0)

·5 pnt⌒xɜ$[(x-a)\times u=0]$ = (plan passant par a et normal à u).

·6 Uu+Uv = (vecteur dirigé selon la bisectrice des vecteurs u et v).
a+q[U($b-a$)+U($c-a$)] = (bisectrice de l'angle bac).
$u\times$Uv = (projection de u sur v, comme nombre).
($u\times$Uv)Uv = (» » » , comme vecteur).

·7 pnt⌒xɜ[mod($x-a$) $=r$] = (sphère de centre a et de rayon r).
pnt⌒xɜ$[(x-a)^2=r^2]$ = (idem).

Transl ✻ 41. $u,v\varepsilon$ vct . $p\varepsilon$ pnt .Ɔ.

·0 (Transl u)$p = p+u$ {= « le point p, après la translation représentée par le vecteur u ». } Df

·1 (Transl$v$)(Transl$u$) = Transl($u+v$)

·2 $m\varepsilon N_1$.Ɔ. (Transl$u$)^m = Transl mu

Sym ✻ 42. $a,b,c,p\ \varepsilon$ pnt . $u\varepsilon$ vct .Ɔ:

·0 (Sym$c$)$p = c+(c-p)$ {= « symétrique, par rapport à c, de p »}

·1 (Sym$c$)$^2p = p$ ·2 (Sym$b$)(Sym$a$) = Transl $2(b-a)$

·3 Transl$u$ = [Sym($c+u/2$)] (Sym$c$)

·4 (Transl$u$)(Sym$c$) = Sym($c+u/2$)

·5 (Sym$c$)(Transl$u$) = Sym($c-u/2$)

✻ 43. $u,v,w\varepsilon$ vct . u-=0 .Ɔ.

·0 (Sym$u$)v = (cmp||u)v−(cmp⊥u)v Df

·1 (Sym$u$)$^2v = v$

Homot ❋ 44. $a,b,c,p \varepsilon$ pnt . $h,k \varepsilon$q . $u \varepsilon$ vct .$\supset$.

·0 Homot$(c,k)p = c+k(p-c)$ {= « le correspondant de p dans l'Homothétie de centre c et de rapport k » } Df

·1 Homot$(c,1)p = p$. Homot$(c,-1)p =$ (Sym$c$)p

·2 Homot$(c,k)b$—Homot$(c,k)a = k(b-a)$

·3 $k -= 1$.$\supset$. Homot(c,k)Transl$u$ = Homot$[c+uk/(1-k), k]$

·4 $hk -= 1$.$\supset$.
[Homot(b,k)] [Homot(a,h)] = Homot$[a+(b-a)(1-k)/(1-hk), hk]$

·5 $k -= 0$.$\supset$. [Homot$(b, /k)$] [Homot(a,k)] = Transl $(b-a)(1-/k)$

·6 $m \varepsilon N_1$.$\supset$. $[\text{Homot}(c,k)]^m$ = Homot(c,k^m)

Note. Les P41-44 contiennent les définitions et les propriétés principales des opérations appelées translation, symétrie, homothétie. Elles n'ont pas d'application dans la suite.

Rotor Rotat ❋ 45.

·0 Rotor = $i \ni \exists (a,b) \ni [\, a,b \varepsilon$ vct . mod$a$ = mod$b$ = 1 . $a \times b = 0$. $i = (b,-a)/(a,b)\,]$ Df

·1 $i \varepsilon$ Rotor .$\supset$. $i^2 = -1$

$a,b \varepsilon$ vct . mod$a$ = mod$b$ = 1 . $a \times b = 0$. $i = (b,-a)/(a,b)$.$\supset$.

·21 $i \varepsilon$ Rotor ·22 $i \varepsilon$ Subst(qa+qb) ·23 Variab$i$ = qa+qb

$o \varepsilon$ pnt . $p,q,r \varepsilon$ o+qa+qb . $t,t' \varepsilon$q . $m \varepsilon N_1$. $u \varepsilon$ qa+qb .$\supset$.

·3 Rotat$(o,i,t)p = o + e^{it}(p-o)$ Df
= « le point p après la rotation de t radiants autour du point o dans le plan de la variabilité de i ».

·31 Rotat(o,i,t') Rotat(o,i,t) = Rotat$(o,i, t+t')$

·32 Rotat$(o,i,t)^m$ = Rotat(o,i,mt)

·33 Rotat$(q,i,-t)$ Rotat(p,i,t) = Transl$[(1-e^{it})(q-p)]$

·34 Rotat(q,i,t) = Transl$[(1-e^{it})(q-p)]$ Rotat(p,i,t)

·35 $e^{it} -= 1$.$\supset$. Transl$u$ Rotat(p,i,t) = Rotat$[p+u/(1-e^{it}), i,t]$

·36 Rotat(p,i,t) Transl$u$ = Rotat$[p-u/(1-e^{it}), i,t]$

·37 $e^{i(t+t')} -= 1$.$\supset$. Rotat(q,i,t') Rotat(p,i,t) =
Rotat$[p+(q-p)(1-e^{it'})/(1-e^{i(t+t')}), i, t+t']$

Note. Nous appelons « Rotor » toute transformation linéaire qui à deux vecteurs a et b unitaires et perpendiculaires fait correspondre les vecteurs b et $-a$. Et nous indiquons par Rotat$(o,i,t)p$, où o est un point, i un Rotor,

t un nombre réel, p un point du plan o+Variab$i$, la nouvelle position du point p après une rotation autour de o dans le plan de i de l'angle fermé par un arc de cercle de longueur t rayons.

Le produit d'un vecteur par un nombre imaginaire a été consideré par Wessel a.1797.

quaternio ✻ 46·0 quaternio = q + q Rotor Df

$x,y\varepsilon$ quaternio .⊃: ·1 $x+y =$

$\imath$ quaternio ⌢ $z\ni(u\varepsilon$ Variab$x$ ⌢ Variab$y$.⊃$_u$. $zu = xu+yu)$ Df

·2 $yx =$

$\imath$ quaternio ⌢ $z\ni(u\varepsilon$ Variab$x$. xu ε Variab$y$.⊃$_u$. $zu = yxu)$ Df

$u,v,w\varepsilon$ vct . u -= 0 .⊃.

·3 $v/u = \imath$ quaternio ⌢ $x\ni(v = xu)$

·4 quaternio = vct/vct Dfp ·5 $(v+w)/u = v/u+w/u$

·6 v -= 0 .⊃. $(w/v)(v/u) = w/u$

« Quaternio » est une expression de la forme $x+iy$, où x et y sont des nombres réels, et i est un Rotor. Nous nous limitons à définir ici la somme et le produit de deux quaternions. Ces théories, qu'on doit à Hamilton, ont une longue bibliographie, et sont un puissant instrument dans les mathématiques appliquées.

On a fondé une « International Association for Promoting the Study of Quaternions and Allied Systems of Mathematics », qui a pour « General Secretary » M. A. Macfarlane, Prof. in Lehigh University, South Bethlehem, Pennsylvania.

rectaTang ✻ 51. $p\varepsilon$ pnt F q . $t\varepsilon$q .⊃.

·0 rectaTang(p,t) = lim{ recta$[pt, p(t+h)]$ |h, q, 0 } Df

·1 Dpt ε vct -ι0 .⊃. rectaTang(p,t) = recta$(pt$, D$pt)$

[P·0 .⊃: rectaTang(p,t) = lim { recta$[pt, p(t+h)$] |h, q, 0 }

§vct 39·2 .⊃ » » » » » » $p(t+h)-pt$ »

» » » » » » $[p(t+h) - pt]/h$ »

» » » = recta(pt, Dpt)]

·2 $n\varepsilon N_1$. Dpt = D^2pt = ... = D$^n pt$ = 0 . D^{n+1}pt ε vct -ι0 .⊃.
rectaTang(p,t) = recta$(pt$, D$^{n+1}pt)$

planOscul ✻ 52. HpP51 $. \supset .$

·0 $\text{planOscul}(p,t) = \lim \{ \text{plan}[\text{rectaTang}(p,t), p(t+h)] | h, q, 0 \}$ Df

·1 $Dpt \, \varepsilon \, \text{vct} - \iota 0 \, . \, D^2pt \, \varepsilon \, \text{vct} - q\, Dpt \, . \supset .$
$\text{planOscul}(p,t) = \text{plan}(pt, Dpt, D^2pt)$

[P·0 $. \supset .$ $\text{planOscul}(p,t) = \lim \{ \text{plan}[\text{rectaTang}(p,t), p(t+h)] | h, q, 0 \}$
P51·1 . 39·5 $. \supset .$ » = » » $[pt, Dpt, p(t+h)]$ »
P39·4 $. \supset .$ » = » » » $, [p(t+h) - pt - hDpt]/h^2$ »
§D 8 $. \supset .$ » = $\text{plan}(pt, Dpt, D^2pt)$]

·2 $m,n \varepsilon N_1 \, . \, Dpt = D^2pt = \ldots = D^{m-1}pt = 0 \, . \, D^mpt \, \varepsilon \, \text{vct} - \iota 0 \, .$
$D^{m+1}pt, \ldots D^{m+n-1}pt \, \varepsilon \, q \times D^mpt \, . \, D^{m+n}pt \, \varepsilon \, \text{vct} - q \times D^mpt \, .$
$\supset .$ $\text{planOscul}(p,t) = \text{plan}(pt, D^mpt, D^{m+n}pt)$

Arc ✻ 53. $a,b \varepsilon q \, . \, a < b \, . \, p \varepsilon \text{pnt} \, F \, a \frown b \, . \supset .$

·0 $\text{Arc}(p, a \frown b) = \iota x \ni \{ \exists (n,t) \ni [n \varepsilon N_1 \, . \, t \varepsilon (a \frown b \text{ f } 0 \cdots n)\text{cres} \, . \, t_0 = a$
$. \, t_n = b \, . \, x = \Sigma [\text{mod}(p t_{r+1} - p t_r) | r, 0 \cdots (n-1)]] \}$ Df

·1 $Dp \, \varepsilon \, (\text{vct} \, F \, a \frown b)\text{cont} \, . \supset . \, \text{Arc}(p, a \frown b) = S(\text{mod}\, Dp, a \frown b)$

Norm curvatura

✻ 54. $p \varepsilon \text{pnt}Fq \, . \, t \varepsilon q \, . \, Dpt \, \varepsilon \, \text{vct} - \iota 0 \, . \, D^2pt \, \varepsilon \, \text{vct} - qDpt \, . \supset .$
$\text{Norm}(p,t) = \text{recta}[pt, (\text{cmp} \perp Dpt)(D^2pt)]$ Df

$\text{Norm}(p,t) = \text{recta}[pt, D(\text{U}Dpt)]$

$\text{curvatura}(p,t) = \text{mod}D(\text{U}Dpt)/\text{mod}Dpt$ Df

Nous donnons ici les définitions de
rectaTang(p,t) = droite tangente à la ligne décrite par p, dans le point de paramètre t,
planOscul(p,t) = plan osculateur id. id.,
Norm(p,t) = normale principale id. id.,
Arc$(p, a \frown b)$ = la longueur de l'arc décrit par p, pour les valeurs de a à b de la variable,
Curvatura = courbure
et les théorèmes pour les trouver.

Le vecteur Dpt, si la variable t est le temps, s'appelle « vélocité du point p ». D^2pt en est l'accélération. Si le point p a une masse, ou coefficient numérique m, $mDpt$ est la « quantité de mouvement », mD^2pt = « force », $m(Dpt)^2/2$ = « force vive, ou énergie cynétique ».

$\digamma$ = paramètre différentiel.

* 61. $k \varepsilon$ Cls'pnt . $k \supset \delta k$. $p \varepsilon k$. $u,v \varepsilon$ qf$k$.$\supset$.

·0 $\digamma(u,k,p) =$
$\rotatebox{180}{$\iota$}$ vct $\frown$ $r \ni \{ \lim \{ [[(uq - up) - (q-p) \times r] / \text{mod}(q-p)] \mid q, k, p \} = 0 \}$ Df
= « paramètre différentiel de u, dans le champ k, pour le point p ».

·1 $up = \max u'k$. $\digamma(u,k,p) \varepsilon$ vct .$\supset$. $\digamma(u,k,p) = 0$

·2 $l \varepsilon$ (Int$k$)FΘ . $t \varepsilon \Theta$. Dlt. $\digamma(u,k,lt) \varepsilon$ vct .$\supset$.
D$(ul, \Theta, t) = \digamma(u,k,lt) \times$ Dlt

·3 Hp P·2 . $ult = \max ul'\Theta$.$\supset$. $\digamma(u,k,lt) \times$ D$lt = 0$

·4 $\digamma(u+v, k, p) = \digamma(u,k,p) + \digamma(v,k,p)$

$a,p \varepsilon$ pnt . $m \varepsilon 2 + \text{N}_0$.$\supset$.

·5 $\digamma[(p-a)^2 \mid p, \text{pnt}, p] = 2(p-a)$

·6 $\digamma[\text{mod}(p-a) \mid p, \text{pnt} - \iota a, p] = \text{U}(p-a)$

·7 $\digamma\{[\text{mod}(p-a)]^m \mid p, \text{pnt}, p\} = m\,[\text{mod}(p-a)]^{m-1}\text{U}(p-a)$

Hamilton a introduit cet opérateur $\digamma$ dans ses *Lectures on Quaternions*, Dublin a.1853, p.610.

Lamé (JdM. a.1840 t.5 p.316) avait appelé « paramètre différentiel de premier ordre de la fonction u » le mod$\digamma(u,k,p)$.

Les P·2·3 donnent la règle, énoncée par Leibniz, a.1693 t.6 p.233, pour trouver la normale au lieu des points pour lesquels est constante la somme des distances à plusieurs points fixes.

TABLE DES SIGNES.

Cette table contient les symboles et les abréviations qu'on rencontre dans cette publication, ordonnés selon la forme typographique.

Signes de forme spéciale.

. ( ) [ ] { } §1P1·2
; « système de variables » §1P1·6
, §1P4·0 . Voir ;
: = avec §8
Ɔ « est contenu, on déduit » §1P1·7
= « est égal » §1P1·9
∩ = et §1P1·8
∪ = ou §2P1·0 P4·0
Λ = classe nulle §3
- = non §4P1·0·01·2·3
« inverse » ou « à la place de » §11
' ' = de §12
0 1 2 3 ..... 8 9 X §+P2
+ = plus §20 P1·3
Df de $a+b$, si $a,b\varepsilon N_0$ P3·1·2
si $a,b\varepsilon$n, R, r, Q, q §— P4·0
§/ P12·0 P32·2 §Q P3·0
$a,b\varepsilon$ Cls'N_0 §+ P7
nombres complexes §q_n P1·1
$a\varepsilon$ pnt . $b\varepsilon$ vct §vct P3·2
$a,b\varepsilon$ vct, pnt §vct P3·3 P7
> < ⋛ ≦ §21 P1·0 P2·0 §— P7·0
§l' P1·5 P2·0·2 §Q P17·0
— = moins §22 P1·0 P2·1 P5·0
§/ P22·0 P32·3 §Q P11·0
§q_n P1·3 §vct P2·0 P3·4
± §Q P56·0
× = multiplié par §23 P1·0 2 6·0
§/ P5·0 32·6 §Q P21·0 §q_n P1·4
§vct P5·0 P6·4 P8 P11·1

/ = divisé par §24 P1·0 7·0 32·7
§Q P30·0 §Subst P5·2·5
↑ = élevé §25 P1·0 P5·0 P11 P21
§Q P41·0 P52 P60
√ = racine §Q P53
√* = racine générale §q' P4
$a\cdots b$ = les entiers de a à b §31
... = etc. §Σ P1·11
! = factorielle §35
∞ = infini §61 P4
⊢ ¯ « intervalle » §Q P19
∫ voir S.

Lettres grecques.

β = la partie fractionnaire de §42
δ = ensemble dérivé §66
∇ = paramètre différentiel §vctP71
ε = est un §1 P1·4
ɜ = qui §1 P1·5
ϑ = fraction propre §60
θ, Θ = intervalle de 0 à 1 §QP2
ι = égal §6
ɿ = le §7
λ = limites de §65P1·0
Λ = limites généralisées §65P3
π §84
Π = produit §34
Σ = somme §33P1·0·1, P21
§lim P10·0, P11·1·2·3
Φ = indicateur §53

Lettres latines.

lin = fonction linéaire §82
Lm = Classe limite §71 P1·0
lim = la limite §72 P1·0
§q_n P24 §vct P20
Log = logarithme §63
log = logarithme dans la base e §77
log* = logarithme général §πP5·0
max = le maximum des §52
Med = moyen §64
min = le minimum des Voir max
mlt ou m = le plus petit multiple commun §45P1·0 P2·0
mod = module §36 §Q P80 §q_n P3
§SubstP3 §vctP9
mp = la plus grande puissance §52
N_0 = nombre §+ P1·2
N_1 = nombre positif §+P8
n = nombre entier §—P3
Norm = droite normale §vctP54
Np = nombre premier §51
Nprf = nombre parfait §54
nt = le numérateur de §46
Num = le nombre des §32
Oper = opérer par
Oper ∩ §1P5·5
Oper ε §1 P4·1
Oper ɜ »
Oper ∪ §∪P1·5
Oper ∃ §∃P1·21
P = proposition
Pp = proposition primitive §1P3
p. = page
plan §vctP39
planOscul §vctP52
pnt = point §91
Q = quantité positive §62
Q_0 = id. id. ou nulle §QP2·0
q = quantité §QP12

q_n = nombre complexe d'ordre n §80
q′ = nombre imaginaire §83
quaternio §vctP46
quot = le quotient de §41
R = nombre rationnel positif §/P3
R_0 = id. id. id. ou nul §/P31·2
r = nombre rationnel §/P31·0
rep = correspondance réciproque §13
real = partie réelle d'un q′ §q′P3·0
recta = droite §vctP39
rectaTang §vctP51
rest = le rest de §41
Rotor, Rotat §vctP45
S = intégrale §75P1·0
P10·1·2·3·4·6·7·8, §q_n P42
S′ = intégrale par excès §SP1·2
S, = intégrale par défaut §SP1·3
Sb Voir Subst
sgn = le signe de §36
§DtrmP1·0 §vctP15
Simplif = simplifier §1P3·6
sin = sinus §85P1·0
$\sin^{-1}$ = antisinus §sinP3
sim = correspondance semblable §13
Sb, Subst = Substitution §82
Syll = syllogisme §1P3·1 4·4
Sym = symétrique de §vctP42 P43
t. = tome
Ths = thèse
tng, tng^{-1} §sinP2 P3
Transl = translation §vctP41
Transp = transposer §-P2·3·4
P3·7·71, P4·2
U = unité de §vctP15
unit = unité complexe §q_n P2
Variab = variabilité d'une fonction §14
vct = vecteur §91

VOCABULAIRE MATHÉMATIQUE

Le nombre des noms adoptés par les mathématiciens s'est accru pendant les siècles. Il était de 1000 environ dans Archimedes, et arrive à 17000 dans le « Vocabulaire » publié par F. Müller a.1900, sans compter les noms appartenant à la Logique.

Nous exprimons ici en symboles la valeur de plusieurs de ces mots, ou indiquons la place où l'on trouvera cette expression. Dans un développement successif du Formulaire on pourra, peut-être, ériger en symboles quelques uns de ces mots ; et alors l'expression symbolique que nous en donnons servira comme Df. Mais la plus grande partie doit être supprimée de l'enseignement.

Abscissa v. coordinata
Absolu (nombre) $=$ N_1, R, Q
» (valeur) $=$ mod
» convergence v. série
Absurdum $= \wedge$
Accélération §vct 54
Accroissement de $fx = f(x+h)-fx$
Acutus $=$ aigu; v. angle
Additio $=$ (opération $+$)
Addition logique $=$ (opération $\cup$)
Æquatio $=$ équation
Aire du triangle §vct 33·61
Alternando §R 4 §vct 2·4
Analogies de Neper §vct 34·8
Analyse indéterminée §Dvr 2·3·4
Angulus (figure) $=$ *γωνία* §vct 40·5
» (nombre) $=$ ang
Antécédent d'une raison $a/b = a$
Applicata $=$ ordonnée.
Ἀποτομή $=$ residuum binomiale (Kepler) §Q54·4
Arc sin $=$ $\sin^{-1}$
Arcus $=$ Arc
Arête v. angle
Argument de $a =$ imag log a
Arithmétique (moyenne) §Med 3
» (valeur) $=$ mod
» (triangle) $=$ table de C

ἀριθμός $= N_1+1$.
Arrangements n à n avec répétition des objets $k = k\,\mathrm{F}\,1\cdots n$
» simples $=$ $(k\,\mathrm{F}\,1\cdots n)$sim. §$\pi$ 3·2
ἀσύμμετρος $=$ incommensurabilis.
Axe $=$ *ἄξων* $=$ droite
Axioma $=$ *Ἀξίωμα* $=$ Pp

Barycentre §vct 7
Base d'une puissance $a \upharpoonright m = a$
» des logarithmes ${}^a\mathrm{Log}\,x = a$
Bernoulli (nombres de) $=$ B
Bêta (fonction) §S 5·3
Binomium $=$ *ἡ ἐκ δύο ὀνομάτων* $=$ $R+\sqrt{}R$ §Q 18·3
Binome $=$ somme de deux q v. coefficients, formule, série.
Bisectrice §vct 40·6

Carré $= \upharpoonright 2$; carrée (racine) $= \sqrt{}$.
» (nombre) $= N^2$
Carré magique d'ordre $m =$ $(1\cdots m^2)\mathrm{f}(1\cdots m : 1\cdots m) \cap u \ni [r \varepsilon 1\cdots m .\supset_r . \Sigma(u_{r,s} | s,1\cdots m) = \Sigma(u_{s,r} | s,1\cdots m) = \Sigma(u_{s,s} | s,1\cdots m) = \Sigma(u_{m-s+1,s} | s,1\cdots m)]$
Cascade (Rolle) $=$ D §D 4·3
Centrum $=$ *κέντρον*.

Centre de la figure k = pnt ⌒ x϶[(Sym x)k = k]
» gravité = centre des moyennes distances (Carnot) = barycentre
Cercle de convergence §q′ 10·2
Champs de points = Cls'pnt
Changement de variable §S 30·11
Chiffre = 0⋯9. Le mot dérive de *cyphra* = 0.
» des unités de a = Chf$a$
» d'ordre n de a = Chf X$-n$ a
Classe = Cls
Coefficient de b dans ab = a
» du binome = C
» différentiel = D
Combinatio. kε Cls .Ↄ.
(combinaisons des k) = Cls'k
» (avec répétition) = N_0Fk
(nombre des) = C
classe des C(m,n) = n
Commensurabilis = σύμμετρος.
a,bεQ .Ↄ. (a est commensurable avec b) = (aε Rb
Commun diviseur §Dvr
» multiple §mlt
a,bεCls .Ↄ.
(classe commune à a et b) = a⌒b
Complément de x (si xεθ) = 1—x.
» (dans les log) = 10—x.
» (en trigonométrie) = $\pi/2-x$.
Componendo, une proportion §R 11·1
Composante parallèle = cmp||
» normale = cmp⊥
Composition des déductions §1 P5·4
» vecteurs §vct 3·3
» translations, rotations » 41, 45
Conclusion = Ths
Condensé (ensemble) §δ
Condition = P contenant des lettres variables §1 P1·4
a est cond. nécessaire de b .=. bↃa
a est cond. suffisante de b .=. aↃb
Cône = κῶνος. §vct 40·3
Congruence: $a \equiv b$ (mod.m) de Gauss signifie aε b+nm.

Conjugué = conj §q′ 3·2
Consequens terminus rationis a/b = b
Constante d'Euler = C.
Continue (fonction) = cont
Convergente v. série.
Convexe (figure) §Med
Coordinatæ §vct 12
Corollarium = conséquence d'une P
Correspondance = f
Cosinus = cos
Cosinus versus x = 1—sin$x$.
Cotang x = /tng$x$ = tng($\pi/2-x$)
Cosécante de x = /sin$x$.
Côté = πλευρά, v. angle.
Cubus = κύβος = ⎾3, ou N^3.
Cylindrus = κύλινδρος §vct 40·3

Dénominateur de a/b = b.
» réduit = dt
Dénombrable (ensemble) §Num ·43
Dérivée à gauche, à droite §D
Dérivé (ensemble) = δ
Déterminant (considéré comme un tableau de n^2 q) = qF(1⋯n ⁝ 1⋯n)
Valeur du déterminant = Dtrm
Diagonale §vct 8·44
Dièdre v. angle
Différent = -ι
Différence entre a et b = $b-a$.
Différentielle v. D.
Disposition v. arrangement.
Distance des points a, b = mod($b-a$)
Divergente v. série.
Dividendo §R 11
Division = (opération /)
» du cercle §π P2
Divisible par a = a×N_1
Diviseur de a = N_1⌒a/N_1 §Π 3·1 §mp 2·2
Diviseur de 0 §Subst 5
Divisibilité (caractères de) §Chf ·2

Ellipse (arc) §sin 14·1
Ensemble = Cls
Entier (nombre) = N_0, ou N_1, ou n
» (partie) = E

Equation = æquatio.
» logique §– 5
» du premier degré §r 40 §Sb 5·6
» second » §Q 56 57
» troisième » §Q 58
» d'ordre n §Σ 8 §q' 5
» différentielle §q_n 35 §Sbst 14 15
Erreur. (a est un valeur de b, avec une erreur plus petite que c) = ($b \varepsilon\, a+\theta c$)
Espace = lieu des points = pnt.
» = distance, = arc.
» à n dimensions = q_n.
Exposant de a⌃m = m.
Exponentielle (fonction) = $e^x | x$
Extérieur (ensemble) §Int
Face v. angle dièdre.
Facteurs de $a \times b$ = a, b
Factum ex a et b = $a \times b$
Faculté de base a, d'exposant n de raison r ($a, r \varepsilon$ q . $n \varepsilon N_1$) = $a^{n|r}$ (Kramp) = $\Pi\{a+[0 \cdots (n-1)]r$
Factorielle m = $m!$
Fermé (ensemble) §δ
Figure = Cls'pnt
Fluxio (Newton) = dérivée.
Fluens = fonction qu'on dérive.
Fonction = f, ou F.
» continue = cont.
» coissante = cres.
» décroissante = decr.
$f\varepsilon$ (fonction paire) .=: $x \varepsilon$q .⊃$_x$. $f(-x) = fx$.
» (» impaire) .=: » » $f(-x) = -fx$.
Fonctions trigonométriques §sin
» hyperboliques §π 3·7
Formule de quadrature §S 22
» de Taylor §D 8
» du binome §C 3·1
» du polynome §C 8
Fraction = R
» propre = ϑ
» impropre = /ϑ = 1+R
» décimale §Σ P11 §Chf·4

Fraction continue §Q 84 §e 3·1·2
Frontière (ensembie) §Int
Impair (nombre) = $2N_0+1$
Indéterminées (formes) §D 5
Indicateur (suivant Cauchy) = Φ
Indice d'un radical (voir).
Intégrale = S
Intégrale multiple §S P20
Intérieur (ensemble) §Int
Interpolation (formule d') §D P10.
Intervalle §Q 19
Inverse = /. inversions v. Dtrm.
Invertendo §R 4
Irrationnel (nombre) = Q–R
Isolé (ensemble) §δ
Ligne = pnt f q
Ligne droite = recta
Limite = l', l$_,$, λ, δ, Lim, lim.
Mantisse = β
Matrice (d'une substitution) §Sbst
Maximum, minimum §max, §D 4·1
Membre d'une égalité §=.
Module = mod. v. congruence.
Moyen (point) entre a et b = $(a+b)/2$
Moyenne arithmétique entre a et b = $(a+b)/2$ §Med
» géométrique = $\surd(ab)$
» harmonique = $2ab/(a+b)$
» arithmo-géométrique = $\pi/S\{[(a\cos x)^2+(b\sin x)^2] | x, \Theta\pi]\}$ §sin 14·3
Multiple de $a = a \times N_1$, ou $= a \times$n.
Multiplication, multiplicande, multiplicateur §×
Négatif (nombre) = –N
Népérien (logarithme) = log
Nombre = N_0, N_1, n, R, r, Num, Q, q, q', B, etc.
Nombre premier = Np
a et b sont des nombres premiers entre eux .=. Dvr(a,b) =1
Nombre composé = N_1–Np
Normal (plan) §vct P40·5
Numérateur §/ §nt
Numération §Σ P10, §Num

Publications

citées par une abréviation dans le F.

La lettre F suivie de l'année, indique les éditions partielles ou totales du Formulaire, que nous avons successivement publiées :

F1888 = Calcolo geometrico, preceduto dalle operazioni della logica deduttiva.

F1889 = Arithmetices principia, nova methodo exposita.

F1894 = Formulaire de Mathématiques (Introduction).

F1895 = » » t.1.

F1897 = » » t.2 N1.

F1898 = » » t.2 N2.

F1899 = » » t.2 N3.

RdM. = Rivista di Matematica, t.1-5 a.1891-95.
= Revue de Mathématiques t.6 a.1896-99, t.7 a.1900.

AErud. = Acta Eruditorum, Lipsiae a.1682-1757.
AJ. = American Journal of Mathematics, Baltimore a.1878...
AM. = Acta Mathematica, Stockholm a.1882...
AmericanT. = Transactions of the American Mathematical Society, New-York a.1900...
Amsterdam Ak. = Versl. d. k. Akad. v. W. te Amsterdam
Ann. = Annales de Mathématiques publiées par G. F. Gergonne, a.1811-29.
AnnN. = Nouvelles annales de Mathématiques, Paris, a.1840...
BBonc. = Bullettino di bibliografia etc., di B. Boncompagni, Roma a.1868-87.
BD. = Bulletin des Sciences mathématiques, par Darboux, Paris a.1877...
BsF. = Bulletin de la Societé math. de France. Paris a.1873...
BerolMisc. = Miscellanea Berolinensia.
BerlinM. = Mémoires de l'Académie des Sc. de Berlin, a.1745...
BolognaM. = Memorie dell'Accademia delle scienze di Bologna, a.1850...
BM. = Bibliotheca Mathematica, Journ. d'hist. d. math., publié par G. Eneström, Stockholm, a.1887...
CambridgeT. = Transactions of the Phil. Society Cambridge...
CorrM. = Correspondance Mathématique etc. publiée par P. H. Fuss, St. Petersbourg a.1843.
CorrN. = Nouvelle correspondance Mathématique, a.1878...
Encyklopädie = id. der Mathematischen Wissenschaften, Leipzig a.1898...
IdM. = Intermédiaire des Mathématiciens, Paris a.1894...

JdM. = Journal de Mathématiques publiés par Liouville, Résal, Jordan, Paris a.1836...
JfM. = Journal für die reine und ang. Math., Berlin a.1826...
JP. = Journal de l'École Polytechnique, Paris a.1795...
LondonT. = Philosophical Transactions of the R. Society, London a.1666...
LondonP. = Proceedings of the R. Society. London
MA. = Mathematische Annalen, Leipzig a.1869...
Mathesis publié par P. Mansion, Gand a.1881...
Mm. = The Messenger of mathematics, London, a.1871...
MünchenB. = Münchener Berichte.
Monh. = Monatshefte fur Mathématik, Wien a.1889...
NapoliA. = Atti della Accademia delle scienze di Napoli, a.1787...
NapoliR. = Rendiconti » » » »
PalermoR. = Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, a.1884...
ParisM. = Mémoires de l'Acad. des Sciences de Paris, a.1666...
ParisCR. = Comptes rendus de l'Académie des Sciences, Paris a.1835...
ParisSE. = Memoires presentés par divers savants à l'Académie des sciences de Paris = (Savants Étrangers) a.1805...
PetrC. = Commentarii Academiæ Scientiarum Petropolitanæ, a.1726-1746.
PetrNC. = Novi Commentarii Academiæ Scient. Petropolitanæ, a.1747-1776.
PetrA. = Acta Academiæ Scientiarum Petropolitanæ, 1777-1782.
PetrNA. = Nova Acta Ac. Sc. Petropolitanæ, a.1783...
PetrB. = Bulletin de l'Ac. des Sc. de St. Petersbourg.
QJ. = Quarterly Journal of Mathematics.Cambridge a.1857...
TorinoA. = Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino a.1865...
TorinoM. = Memorie » » » » » a.1759...
Zm. = Zeitschrift für Mathematik und Physik, Leipzig a.1856...

BIBLIOGRAPHIE

Les numéros indiquent les P du F où chaque A. est cité.
" *n* " signifie " Note ".

ABEL Niels Henrik, a.1802 – 1829. *Œuvres*, Christiania a.1881.
§⊃ 1·7*n* §C 7·2 §lim 13·41 15·3 19·4 23·2·3 §q′ 10·1·4 §sin 9·3-5

ABÛ'LWÉFA a.940 – 998. §sin 4·1 §vct 34·2

ADAMS §B 1·23

AHMÈS (Aahmesu), papyrus Rhind, a.—1740 – —2200? publié par : EINSELOHR, *Ein Mathematisches Handbuch der alten Aegypter*, Leipzig a.1877. §— 2*n* §/ 8·6 14·1 §Σ 6·1 §π 1·1

ALBATEGNIUS = AL BATTÂNI a.880. §sin *n* §vct 34·1

ALCHODSCHANDÎ Muhammed, a.992. Cfr. M. Cantor t.1 p.708. §↾ 6·0

ALQÂCHÂNÎ, *La clé du calcul*, a.1589. Cfr. Woepcke, Annali di Matem. a.1864 t.6 p.225. §Σ 3·4 4·1

AMIGUES. §Σ 4·2

ANTHONISZ A. a.1527 – 1607 §π 1·5

APOLLONIUS PERGAEUS = Ἀπολλώνιος ὁ Περγαῖος a.—200?
— *Quæ Græce extant*, Edid. Heiberg, Lipsiæ a.1891-93. §vct 8·63·81-·83·9

ARBOGAST L. F. A. a.1759 – 1803.
— *Du calcul des dérivations*, a.1800 §D 8

ARCHIMEDES = Ἀρχιμήδης, a. —287 – —212.
— *Opera omnia*, Edid. Heiberg, Lipsiæ a.1880. §Σ 4·1 10·1 §π 1·2

ARISTOTELES, a.—384 – —322.
— *Analytica priora* (Ἀναλύτικα πρότερα). §⊃ 1·1·7*n* 4·4 §∧ 1·7

ARYABHATA, a. 475 – 550. Cfr. Rodet, *Leçons de calcul d'Aryabhata*. Journal Asiatique, a.1879, 1880. §/ 40·1 §Σ 3·3 4·1 10*n* 11·1·2 §π 1·4

COTES Roger, a.1682 ⌐ 1716.
— *Logometria* a.1714 LondonT. t.29 p.4-60 §e 1·2 3·1 §sin 1·3
— *Harmonia mensurarum*, ed. Smith, Cantabrigiæ a.1722.
§S 22·2-·6 §π 2·3 §sin 16·1-·3

CRAMER Gabriel, a.1704 ⌐ 1752.
— *Introduction à l'analyse des courbes algébriques*, a.1750.
§Dtrm 1·4

DARBOUX Gaston, *Mémoire sur les fonctions discontinues*, Annales scient. de l'Ecole normale supérieure s.2 t.4 a.1875.
§f′ 2n §S 2·31 11·12 12·1

DASE Zacharias. §Np 1·1n §π n §sin 5·4

DEGEN C. F. a.1766 ⌐ 1825 §↾ 14·6

DELAMBRE §vct 34·7

DE MORGAN Augustus, a.1806 ⌐ 1871.
— *Formal logic* a.1847 §∪ 1·61 §∧ 1·8 2·7
— *On the syllogism*. CambridgeT. a.1858. §- 3·1-·4

DESCARTES Réné, a.1596 ⌐ 1650, *La Géométrie*, a.1637. §↾ 1n
— Œuvres, ed. Ch. Adam et P. Tannery, Paris a.1897... §Nprf ·3

DIOPHANTUS, a. 325 ⌐ 409.
Διοφάντου Ἀλεξανδρέως Ἀριθμητικῶν, Edid. Tannery, a.1893.
§— 2n §× 6·01 §/ 40·2·5·6·7·8 §↾ 1·4 2·1 14·41 §Q 57·1·2·4

DIRICHLET (Lejeune) Gustav, a.1805 ⌐ 1859.
— *Werke*, Berlin, a.1889. §Np 12·6 §lim 18·2 31·6 §S 3·6n

DIXON §! 7·51

EISENSTEIN Ferdinand, a.1823 ⌐ 1852.
— JfM., a.1843, t.27 p.193; a.1844, t.28 p.39.
§Np 7·4 §lim 8·5 16·91 20·4 §log 2·8
— *Mathematische Abhandlungen*, a.1847. §q_n 25·2

ENCKE Johann Franz, a.1791 ⌐ 1865 §lim 25·2

EUCLIDES = *Εὐκλείδης*, a.—315 ⌐ —255.
Opera omnia, edid. Heiberg, Lipsiæ, a.1884.
§⊃ 1·1n §× 1·31·4 3·2·3 5·1 §/ 4·1·2·5-·7 5·2 11·1-·4
16·1·3 21·1 §↾ 1·6 2·1 4·01-·1 5·2 9·03 14·02·03·24 §Σ 6·1

JACOBI, a.1804 ¬ 1851. Werke §Σ 4·2 5·2 22

JENSEN. §log 3·1

JEVONS, *Pure logic* a.1864. §- 3·95

JOANNES DE REGIO MONTE a.1436 ¬ 1476. §Σ 11*n*

— *De Triangulis omnimodis libri quinque*, Norimbergæ a.1533 §vct 34·1·2

KEPLERUS Joannes a.1571 ¬ 1630.

— a.1609 = *De motibus stellae Martis.*
(Opera, ed. Fritsch a.1860 t.3). §sin 14·2

KOCH, AM. t.15 §Dtrm 6·1

KRAMP Christiaan a.1760 ¬ 1826. §! 1·1*n*

KRONECKER Leopold, a.1823 ¬ 1891, *Werke*, a.1878. §sgn *n*

LAGRANGE Joseph Louis, a.1736 ¬ 1813.

— *Œuvres.* Paris a.1870-90. §↾ 5·4 14·55 §Σ 1·0*n*
§! 7·4 §Np 9·3·4·62 §D 9·1 10·1 §S 21·1 §Subst 13·2

de LAGNY Thomas Fantet a.1660 ¬ 1734. §vct 8·44

LAMBERT Johann Heinrich, a.1728 ¬ 1777.

— BerlinM. a.1761 p.265, a.1768. §e 1·31 §log 1·3 §π 1·6 §sin 2·2

— AErud. a.1765 p.454. §⊃ 1·7*n*

— a.1771 = *Architechtonik.* §lim 17·1

— a.1781 = *Logische und philosophische Abhandlungen.*
§◡ 3·1·12 §- 3·6

LAMÉ Gabriel a.1795 ¬ 1870. §↾ 14·93 §vct 61*n*

LAPLACE Pierre Simon, a.1749 ¬ 1827. §Dtrm 1·5

LE BESGUE Victor Amédée, a.1791 ¬ 1875.

— *Exercices d'analyse numérique*, a.1859. §Dvr 1·0*n* §mlt 1·5·6

LEGENDRE, a.1752 ¬ 1833.

— a.1797 = *Essai sur la théorie des nombres.* a.VI.
§↾ 5·3 §Np 3·3 5·9 6·4 12·7 §lim 31·0

— a.1808 = » » *Seconde édition*, Paris.
§E 1·0*n* §Np 12·6

— a.1816 = *Suppl. à l'Essai sur la th. des nomb.* §↾ 14·08

— a.1830 = *Théorie des nombres*, Paris. §mp 2·0

— *Géométrie.* §π 1·7 §vct 8·46

LEIBNIZ Gottfried Wilhelm = LEIBNITIUS, a.1646 ⊢ 1716.

— *MathS.* = *Mathematische Schriften*, ed. Gerhardt, a.1848-63.
§ʃ 15·22 §Σ 10*n* §! 8 §mod 1·0*n* 2·9 §Dvr 2·45
§Np 3·9 9·7 §lim 12·4 14·1 16·9 §D 1*n* 3*n* 6·3 §S 20·5
§e 2·2 §π 3·3 §sin 7·3 §Dtrm 1·1

— *PhilS.* = *Die philosophischen Schriften*, ed. Gerhardt, Berlin, a.1875-90 §Ɔ 4·2 5·3-·6 6·0 7·2 10·6 §∪ 1·3-·6 2·1·2·4
§∧ 1·0 2·5 §- 4·1·2

— *Briefwechsel mit Mathematikern* ed. Gerhardt, Berlin a.1899.
§D *n*

— Mss. = Manuscrits inédits, conservés à la bibliothèque de Hannover, et publiés dans F1899 par M. Vacca.
§Ɔ 1·3*n* 4·4 6·1·2 §- 2·2 §! 8 §Np 9·2

LEONARDUS PISANUS, de filiis Bonaccii *Liber abbaci*, a.1202. (Pubblicato da B. Boncompagni, Roma, a.1857.)
§/ 1*n* §Np 3·1 §Q 56·11

LINDEMANN F., MA. a.1882 §π 1·9

LIONNET §Nprf ·5

LIOUVILLE Joseph, a.1809 ⊢ 1882.

— JdM. a.1857. §mp 2·6 §e 1·32

LOBATTO §sin 9·6

LUCAS Éduard, a.1842 ⊢ 1891.

— TorinoA. a.1878 t.13 p.283. §Dvr 2·48·49 §Np 4·4

— AJ. a.1878 t.1 p.229. §Np 9·71·72 11·2·3

— a.1891 = *Théorie des nombres*, Paris. §Σ 4·2 §Np 12·4

McCOLL Hugh, *The calculus of equivalent statements.* Proceedings of the London Mathematical Society a.1878 t.10.
§Ɔ 5·6 6·0 7·3 §∪ 1·5 2·5 4·2-·21 ; — a.1900 §∪ 4·22

MACLAURIN Colin, a.1698 ⊢ 1746.

— *A treatise of Fluxions* a.1742.
§lim 12·1 14·5·6 16·7 §D 8 §S 11·0

— *A treatise of Algebra*, a.1748. §— 2*n*

MANSION Paul. §Dtrm 3·3
a.1887 = *Résumé du cours d'anal. inf.*, Paris. §lim 18·4

MASCHERONI Lorenzo, a.1750 ⌐ 1800.
— *Adnotationes ad calc. integr.* etc. Ticini a.1790. §*C n*
— *Geometria del compasso* §π 1·81

MERCATOR Nicolaus, a.1620 ⌐ 1687.
— *Logarithmo-technia*, Londini a.1668. §lim 16·2 §log 1·3

MERTENS. §lim 19·5

METIUS Adrianus, a.1571 ⌐ 1635. §π 1·5

MÖBIUS August, a.1790 ⌐ 1868.
— *Werke*, Leipzig a.1885. §vct 7·6

NASIR EDDIN ATTÛSI §vct 33·6

J. NEPERUS, a.1550 ⌐ 1617.
— *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* a.1614.
§Log §vct 34·6·8

NEWTON, a.1642 ⌐ 1727.
— a.1676 = *Epistola prior Isaaci Newtoni ad Henricum Oldenburgium*, 13 Junii 1676.
§Q 53*n* §lim 23·1 §e 2·1 §sin 7·1·2
— a.1686 = *Philosophiæ naturalis principia mathematica*
§D 3*n* 10·1*n*

NICOLE §*Π* 4·2

NICOMACHUS = *Νικόμαχος*, a. 50 ⌐ ? edid. Hoche. §Σ 4·1

OLTRAMARE. §↾ 15·13 §Σ 5·2

ORESME Nicole, a.1323 ⌐ 1382. §Q 53*n*

OSBORN §Np 13·1

OUGHTRED Guilielmus, a.1574 ⌐ 1660.
— *Clavis Mathematica*, a.1631. §> 1·0*n* §× 1·0*n*
— *Opuscula Mathematica*, Oxonii a.1667. §/ 1·5*n*

PACIUOLO Luca, a.1440 ⌐ 1515, *Summa de Arithmetica Geometria Proportioni et proportionalita*, a. 1494. §— 2*n*

PADOA Alessandro
§◡ 3·43 §∃ 3·3 §ι 3·4·8 §: ·1·41 §‘ ·1·11·6 §+8 *n* §nt*n*

PAPPUS = *Πάππος*, a.150. §/ 16·5

SCHRÖDER Ernst.
— a.1877 = *Operationskreis des Logikkalkuls*
§∪ 2·3 3·2·21·42 §− 3·1-·4·92 5·1
— *Algebra der Logik*, a.1890,1891,1895. §∪ 3·23·41 §− 3·93·94 5·3

H. A. SCHWARZ. §D 10·1

SEGNER Johann Andreas, a.1704 – 1777.
— *Specimen logicae universaliter demonstratae*, a.1740.
§⊃ P1·7*n* §− 3·6

SMITH Henry John Stephen, a.1826 – 1883.
— *The Collected Mathematical Papers*, Oxford, a.1894.
§Dtrm 4·1·2

STERN §lim 22·1

STEVIN Simon, a. 1548 – 1620, *Œuvres mathématiques*, publiées par Albert Girard, Leyde a. 1634. §Σ 11*n*

STEWART Matthew, a. 1717 – 1785.
— *Propositiones geometricae more veterum demonstratae*, Edinburgh a.1763. §vct P14·2

STIELTJES Thomas Jean a.1856 – 1894.
— AmsterdamAk. a.1882 §D 10·1
— a.1895 = *Essai sur la th. des nomb.* §Dvr 1·34 §mlt 1·34

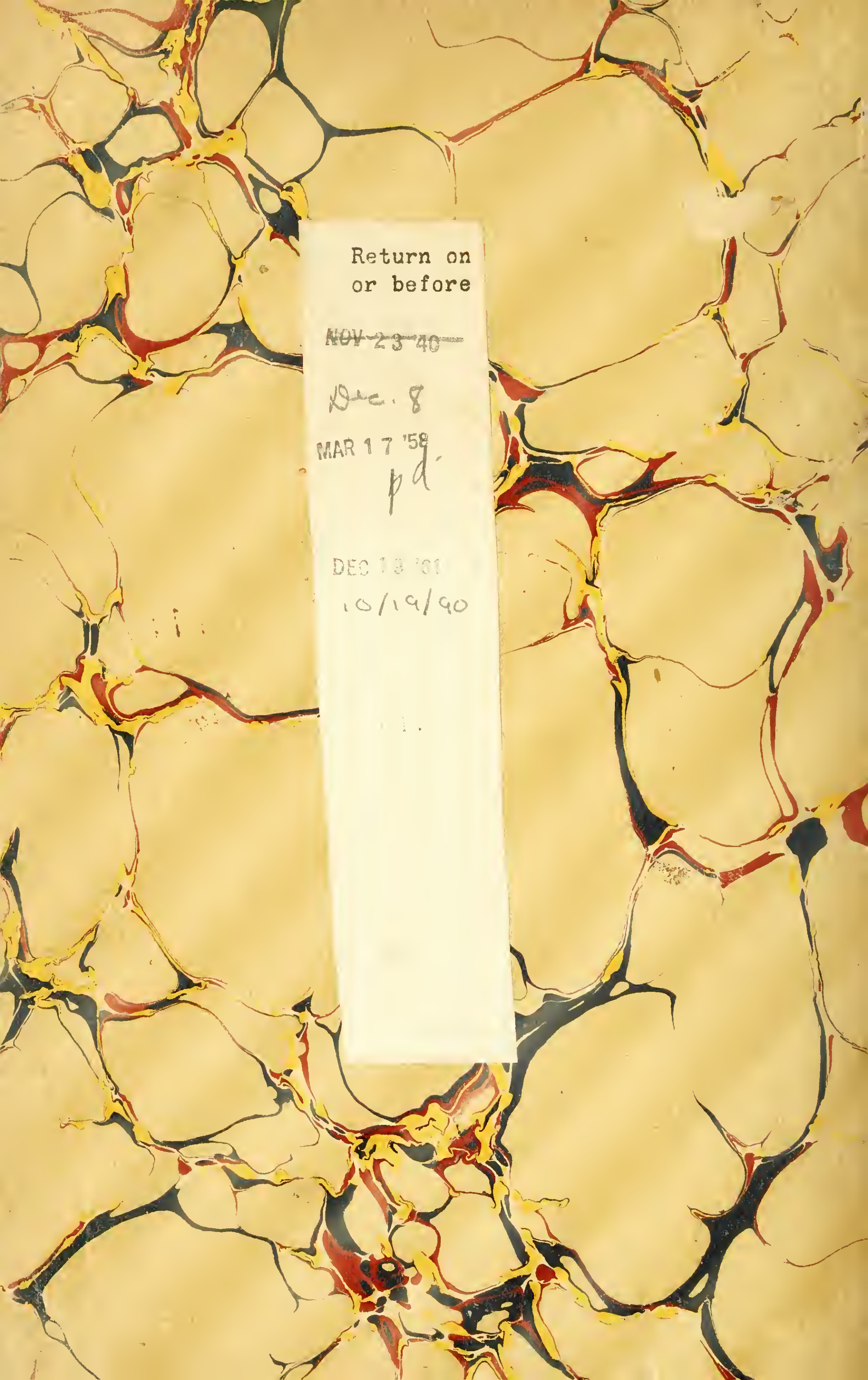
STIFEL, 1487 – 1567.
— *Arithmetica integra*, a.1544. §↑ 2·1
— *Deutsche Arithmetica inhaltend die Hauszrechnung, Deutsche Coss and Kirchrechnung*. Nürnberg, a. 1549.
§— 2*n* §l′ 2·0*n*

STIRLING Jacobus, a.1692 – 1770.
— *Methodus differentialis: sive tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitarum*, Londini a.1730.
§lim 14·4 22·6 §S 5·3-·7 §π 3·5·6 §B 2·2

TARTAGLIA Nicolò, a.1500 – 1557.
— *Quesiti et Inventioni diverse*, Vinegia a.1546. §Q 58·1
— *La seconda parte del general trattato di numeri, et misure.* Venezia, a.1556. §↑ 2·1 §! 6·1 7·1*n*

Brook TAYLOR, a.1685 – 1731.
— *Methodus incrementorum directa et inversa*, a.1715. §D 8*n*

TABLE DES MATIÈRES


Return on
or before
NOV 23 '40
Dec. 8
MAR 17 '58
pd
DEC 13 '61
10/19/90

